Chapitre 4 : Intégration numérique

1) **But** : étant donné $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, au moins continue,

calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ numériquement (c.-à-d., approcher).

2) **SPDG** $[a,b]=[0,1]$ car $\int_a^b f(x)dx \overset{ch.d.v.}{=} h\int_0^1 f(a+th)\,dt$,

$h := b-a$ $\left(\begin{array}{l} x = a+th \\ dx = h\,dt \end{array}\right)$

Il suffit donc de trouver des algos pour calculer $\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx}$

3) **Motivation** : l'évaluation des intégrales définies se présente dans de nombreux domaines des maths, sciences et ingénierie

e.g. intégrales compliquées résolues avec MAPLE, MATLAB ...

Q $\Rightarrow$ Quelles sont les techniques derrières ces logiciels ?

4) **Idée** : soit $f(x) \simeq p_n(x)$, le pol. d'interp. sur $[0,1]$ de f,

alors $\int_0^1 f(x) \simeq \int_0^1 p_n(x)\,dx$

Q : a) vrai ?? $\Longrightarrow$ analyser les erreurs (théoriques, pas d'arrondi)

b) est-ce qu'on doit construire p_n explicitement et puis l'intégrer ?

4.1 Formules de quadrature (f.d.q.)

$p(x) = \sum_{i=1}^{s} f(c_i)\, \ell_i(x)$ où $c_1, \dots, c_s \in [0,1]$ points d'interpol. (distincts)

$\uparrow$ fonctions base de Lagrange

$(\leadsto p \in \mathbb{P}_{s-1})$

$$\int_0^1 p(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{\sum_{i=1}^{s}}_{\text{ne dépend pas de } x} f(c_i)\,\ell_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{s} f(c_i) \underbrace{\int_0^1 \ell_i(x)\,dx}_{=: b_i}$$

$=: b_i$ les poids de quadr. ne dépendent pas de f, seulement des c_i (calculer au préalable)

Du coup, on peut approcher l'intégrale par :

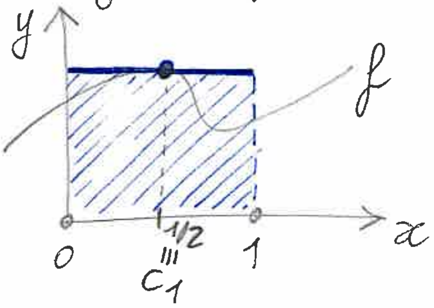
$$\boxed{\int_0^1 f(x) \simeq \sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i)}$$

FORMULE DE QUADRATURE À s ÉTAGES AVEC NOEUDS $c_1, \dots, c_s$ ET POIDS $b_1, \dots, b_s$ (Déf. 4.1)

E.g. Formules de Newton-Cotes (NC) ($\sim$1700, deux math. anglais)

CHOIX DE N.C. : les noeuds $c_1, \dots, c_s$ sont ÉQUIDISTANTS dans $[0,1]$ où $c_1 = 0$, $c_s = 1$.

$s = 1$ règle du point milieu : $f(\frac{1}{2})$



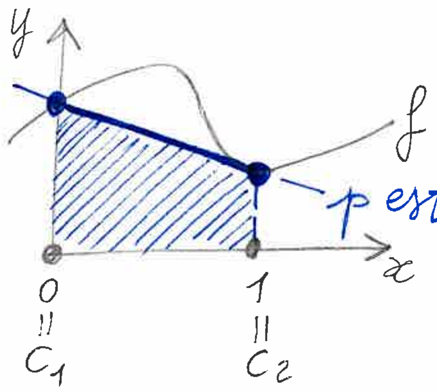
p est constante

$s = 2$ règle du trapèze : $\dfrac{f(0)+f(1)}{2}$

Pour vérifier la formule :

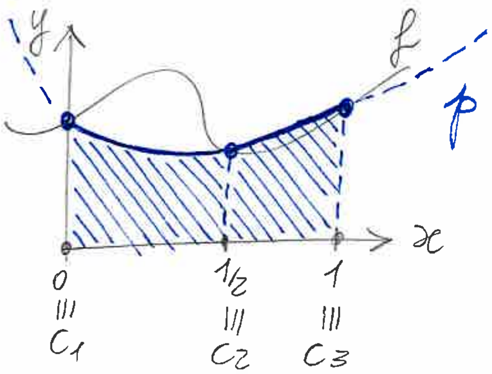
$b_1 = \int_0^1 \ell_1(x)\,dx = \dots = \frac{1}{2}$

$b_2 = \int_0^1 \ell_2(x)\,dx = \dots = \frac{1}{2}$



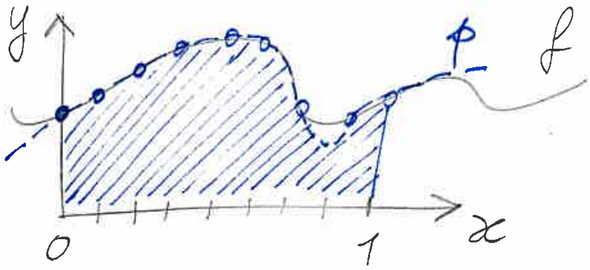
p est linéaire

$s = 3$ règle de Simpson : $\frac{1}{6} f(0) + \frac{4}{6} f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6} f(1)$



p est quadratique

EN GÉNÉRAL : $b_i = \int_0^1 \ell_i(x)\,dx$ où $\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} \dfrac{x - c_j}{c_i - c_j}$



et $c_i = \dfrac{i-1}{s-1}$, $i = 1, \dots, s$.

On peut calculer analytiquement les poids b_i $\forall s = 1, 2, \dots$

$\Longrightarrow$ voir Tableau 4.1

⚠ Etant donnés c_i et b_i, très facile à calculer $\sum f(c_i) b_i$!

Est-ce qu'on peut faire de mieux ? Oui : utiliser pts de Chebyshev ! :

① Fejér (1933) : c_i sont les pts de Chebyshev pour $[0,1]$
(c-à-d., racines de $T_s(x)$ envoyées à $[0,1]$)

② Clenshaw-Curtis (1960) : c_i sont les points d'extrema de $T_s(x)$ envoyés à $[0,1]$
↓ PTS DE CHEBYSHEV DE 2ème ESPÈCE.

⇒ F. et C.C. formules beaucoup plus précises (cfr. phénomène de Runge) que celles de N.C., mais N.C. important pour des raisons historiques.

Déf. 4.3 Une f.d.q. est d'ORDRE p si

$$\int_0^1 q(x)\,dx = \sum_{i=1}^{s} q(c_i)\,b_i \qquad \forall q \in \mathbb{P}_{p-1}$$

c-à-d., elle est exacte pour tous les polynôme de degré $\leq p-1$.

Notations : Erreur de quadrature : $E_s(f,0,1) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{s} f(c_i)\,b_i$

Remarques :

- Par construction de la f.d.q. $\sum_{i=1}^{s} f(c_i)\,b_i = \int_0^1 p_{s-1}(x)\,dx$, où p_{s-1} est le polynôme d'interpolation de $f(x)$ aux points $c_1, \dots, c_s$.
- D'après chap. 1 : $f(x) - p_{s-1}(x) = (x-c_1)\cdots(x-c_s)\,\dfrac{f^{(s)}(\xi)}{s!}$
(erreur d'interpolation pour $f \in C^s$)
- Or, si $f = q \in \mathbb{P}_{s-1}$, alors $f^{(s)}(\xi) = 0$, ce qui donne
$E_s(q,0,1) = \int_0^1 f(x) - p_{s-1}(x)\,dx = 0 \Longrightarrow$ c-à-d. f.d.q. est $\boxed{\text{EXACTE pour } q \in \mathbb{P}_{s-1}}$
- Donc NC à s étages est d'ordre au moins s.
(Vrai pour toutes les f.d.q. basées sur des polynômes d'interpol.)
- Notamment, pour NC à s étages avec s IMPAIR, on gagne un ordre grâce à la symétrie des poids ...

⇝ Expérience en MATLAB : NC s: 2 3 4 5

p: 2 ~~3~~ 4 4 ~~5~~ 6 ...

Déf. F.d.q. symétriques

$$(*)\quad \begin{cases} b_{s-i+1} = b_i \\ c_{s-i+1} = 1 - c_i \\ c_i = 1 - c_{s-i+1} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, s)$$

Exemple : $s = 5$.

$b_1 \; b_2 \; b_3 \; \underset{b_2}{b_4} \; \underset{b_1}{b_5}$ POIDS

$\underset{c_1}{0} \; c_2 \; \underset{1/2}{c_3} \; \underset{1-c_2}{c_4} \; \underset{c_5 = 1-c_1}{1}$ NOEUDS

E.g. NC, Fejér, CC, Gauss (plus tard)

> **Théorème 4.4** L'ordre d'une f.d.q. symétrique est toujours PAIR.

Dém. On montre que si la f.d.q. est d'ordre $2m-1$, alors elle est d'ordre $2m$ (PAIR).

- On montre d'abord que $\forall g(t) \in \mathbb{P}_{2m-1}$ peut être écrit sous la forme

$$g(t) = \underbrace{C}_{\text{constante}}\left(t - \tfrac{1}{2}\right)^{2m-1} + \underbrace{g_1(t)}_{\in \mathbb{P}_{2m-2}}$$

$$g(t) = Ct^{2m-1} + \dots + \dots + a_0, \text{ CAR } C\left(t-\tfrac{1}{2}\right)^{2m-1} = Ct^{2m-1} + \dots \text{ (termes de degré inférieur)}$$

Le coéfficient du terme t^{2m-1} est le même, donc $g_1(t) = g(t) - C\left(t - \frac{1}{2}\right)^{2m-1}$ est de degré $\leq 2m-2$.

- On montre que la f.d.q. est exacte pour approcher $\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^{2m-1} dt = 0$.

$$\sum_{i=1}^{s} b_i\left(c_i - \tfrac{1}{2}\right)^{2m-1} = \cancel{b_1\left(c_1 - \tfrac{1}{2}\right)^{2m-1}} + \dots + b_i\left(c_i - \tfrac{1}{2}\right)^{2m-1} + \dots +$$

en utilisant $(*)$ $\Longrightarrow$ $+ \underbrace{b_{s-i+1}}_{b_i} \underbrace{\Big(\underbrace{c_{s-i+1}}_{1-c_i} - \tfrac{1}{2}\Big)^{\overset{\uparrow}{2m-1}}}_{= \ominus\left(c_i - \frac{1}{2}\right)^{2m-1}} + \dots + b_s\left(c_s - \tfrac{1}{2}\right)^{2m-1} = 0$

IMPAIR

NOTER QUE LE COEFF $c_{(s+1)/2} = \frac{1}{2}$, ce qui s'annule avec $-\frac{1}{2}$

DONC $\sum_{i=1}^{s} b_i\left(c_i - \frac{1}{2}\right)^{2m-1} = 0$, c.-à-d., la f.d.q. est exacte pour $\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^{2m-1} dt$.

- PAR LINÉARITÉ DE L'ERREUR DE QUADRATURE ON A :

$$\text{erreur pour } g(t) = \underbrace{\text{erreur pour } C\left(t - \tfrac{1}{2}\right)^{2m-1}}_{\text{NULLE}} + \underbrace{\text{erreur pour } g_1(t)}_{\text{NULLE PAR HYPOTHÈSE}}$$

NB: l'erreur pour $g_1(t)$ est nulle par hypothèse comme la f.d.q. est d'ordre $2m-1$ et $g_1(t)$ est de degré $\leq 2m-2$.

CONCLUSION: cette f.d.q. symétrique intègre exactement les polynômes de degré $\leq 2m-1$, donc l'ordre est $2m$ (PAIR). $\square$

4.2 Analyse de l'erreur

Étudions l'erreur d'une formule à s étages

$$E_s(f,0,1) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{s} f(c_i)\,b_i = \int_0^1 \underbrace{f(x) - p_{s-1}(x)}\,dx$$

pol. d'interp de f aux points $c_1, \dots, c_s$

Q : $\lim_{s\to\infty} |E_s| = 0$, c.-à-d., est-ce qu'on peut approcher l'intégrale autant que l'on veut ?

si $f \in C^s_{([0,1])}$, on obtient d'après Thm 1.5 :

$$|E_s(f,0,1)| \leq \left| \int_0^1 (t-c_1)\cdots(t-c_s) \frac{f^{(s)}(\xi(t))}{s!}\,dt \right| \leq \frac{M_s}{s!} \left| \int_0^1 (t-c_1)\cdots(t-c_s)\,dt \right|$$

$$M_s := \max_{\xi\in[0,1]} |f^{(s)}(\xi)|$$

TABLEAU 4.2

- NC pour $\cos(x)$ ✓
- NC pour la fonction de Runge sur $[-5,5]$ ✗

NC divergent pour $s \to \infty$!

PAS DE SURPRISE: PHÉNOMÈNE DE RUNGE POUR PTS ÉQUIDISTANTS !

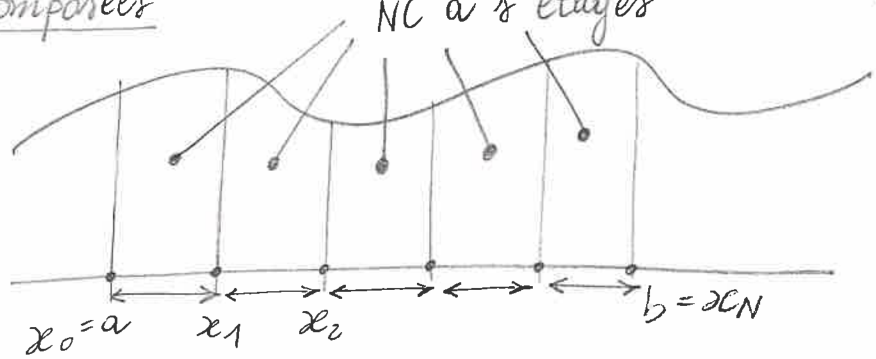
Deux solutions : Ⓐ Changer les noeuds / pts d'interp. (voir chap. 1)

⇝ CC/Fejér : si $f \in C^\infty$, $p_{s-1} \to f$, $s \to \infty$.

Ⓑ LES FORMULES COMPOSÉES :

Au lieu d'augmenter le nombre de noeuds s, on DÉCOUPE $[a,b]$ en N sous-intervalles de longueur $h_j = x_{j+1} - x_j$

E.g. NC composées



$$\int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{DÉCOUPAGE}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{\overbrace{x_j+h_j}^{=x_{j+1}}} f(x)\,dx \underset{\text{ch.d.v.}}{=} \sum_{j=0}^{N-1} h_j \int_0^1 f(x_j+h_j t)\,dt$$

$$\underset{\text{f.d.q.}}{\approx} \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} h_j \sum_{i=1}^{s} f(x_j+h_j c_i)\, b_i}$$

FORMULE COMPOSÉE POUR LA SUBDIVISION
$a=x_0<x_1<\dots<x_N=b$ E POUR LA F.D.Q.
AVEC NŒUDS $c_1<c_2<\dots<c_s$, $c_i\in[0,1]$

Erreur pour les formules composées :

$$E_{s,N}(f) = \int_a^b f(x)dx - \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} h_j \sum_{i=1}^{s} f(x_j+h_j c_i)\, b_i}$$

N : sous-intervalles

Choix typiques :
- subdivision équidistante : $h_j = x_{j+1}-x_j = h$, $\forall j$
- NC avec s petit, $s\leq 8$

Remarque : $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_j+h} f(x)\,dx$, donc

$$E_{s,N}(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{\left(\int_{x_j}^{x_j+h} f(x)\,dx - h_j \sum_{i=1}^{s} f(x_j+h_j c_i)\, b_i \right)}_{=E_s(f,x_j,h) \text{ par déf. d'erreur d'une f.d.q.}} = \sum_{j=0}^{N-1} E_s(f,x_j,h)$$

Lemme 4.5 (Erreur locale). Soit $f\in C^p([x_j,x_j+h])$.
Pour une f.d.q. d'ordre p, on a que

$$|E_s(f,x_j,h)| \leq C_1 h^{p+1} \max_{x_j\leq x\leq x_j+h} |f^{(p)}(x)|$$

où C_1 ne dépend pas de f et h.

Notation : $f\in C^p([a,b])$: f est p fois $\underbrace{\text{continûment dérivable}}$ sur $[a,b]$.
la dérivée existe et elle est continue.

"Dém" On va montrer le lemme seulement jusqu'à un terme de $O(h^{p+2})$, ce qui établit le résultat seulement pour $h \to 0$.

Rappelle Taylor: $f(x_j+\delta) = f(x_j) + f'(x_j)\delta + \dots + \frac{f^{(p)}_{(x_j)}}{p!}\delta^p + O(\delta^{p+1})$

$$E_s(f,x_j,h) = \underbrace{\int_{x_j}^{x_j+h} f(x)\,dx}_{①} - \underbrace{h\sum_{i=1}^{s} f(x_j + \underbrace{h c_i}_{\delta})\, b_i}_{②}$$

Pour ①: $\int_{x_j}^{x_j+h} f(x)\,dx \overset{ch.d.v.}{=} h\int_0^1 f(x_j + \underbrace{ht}_{\delta})\,dt =$

$$= h\int_0^1 \left(f(x_j) + f'(x_j)ht + \dots + f^{(p)}_{(x_j)} \frac{h^p t^p}{p!} + O(h^{p+1}t^{p+1}) \right) dt$$

Pour ②: $② = h\sum_{i=1}^{s} b_i \left(f(x_j) + f'(x_j)hc_i + \dots + f^{(p)}_{(x_j)} \frac{h^p c_i^p}{p!} + O(h^{p+1}c_i^{p+1}) \right)$

ne dép. pas de t ne dép. pas de i

$$E_s(f,x_j,h) \overset{①-②}{=} h\Big(\int_0^1 f(x_j)\,dt - \sum_i b_i f(x_j) \longrightarrow f(x_j)\cdot E_s(1,0,1)$$

$$+ \int_0^1 f'(x_j)ht\,dt - \sum_i b_i f'(x_j)hc_i \longrightarrow f'(x_j)h\, E_s(t,0,1)$$

$$+ \dots$$

$$+ \int_0^1 f^{(p)}_{(x_j)} \frac{h^p t^p}{p!}\,dt - \sum_i b_i f^{(p)}_{(x_j)} \frac{h^p c_i^p}{p!} \longrightarrow f^{(p)}_{(x_j)} h^p \cdot E_s(t^p,0,1)$$

$$+ \int_0^1 O(h^{p+1}t^{p+1})\,dt - \sum_i b_i\, O(h^{p+1}c_i^{p+1}) \Big)$$

b_1, c_1 bornés

Par hypothèse, l'ordre de la formule est p, donc exacte sur $\mathbb{P}_{p-1}$
$\Longrightarrow E_s(t^\alpha,0,1) = 0$ pour $\alpha = 0, 1, \dots, p-1$.

DONC:

$$|E_s(f,x_j,h)| \leq h\,|f^{(p)}_{(x_j)}|\, h^p\, E_s(t^p,0,1) + h\,O(h^{p+1})$$

$$= h^{p+1}\,|f^{(p)}_{(x_j)}| \underbrace{\left(\frac{1}{p+1} - \sum_i b_i c_i^p\right)}_{=:\,C} + O(h^{p+2})$$

$$\int_0^1 t^p\,dt = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

$\square$

Montrons l'erreur de la formule composée:

Thm 4.6. Soit $f \in C^p([a,b])$. Pour une f.d.q. à s étages et d'ordre p

$$|E_{s,N}(f)| \leq C h^p (b-a) \max_{a \leq x \leq b} |f^{(p)}(x)|, \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

où C ne dépend pas de f et h.

Dém. $E_{s,N}(f) = \sum_{j=0}^{N-1} E_s(f, x_j, h)$ ← On commence par ⊛

D'après le lemme 4.5:

$$|E_{s,N}(f)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} C_j h^{p+1} \max_{x_j \leq x \leq x_j+h} |f^{(p)}(x)|$$

$$\leq C \max_{a \leq x \leq b} |f^{(p)}(x)| \underbrace{(N-1)h}_{(b-a)} h^p$$

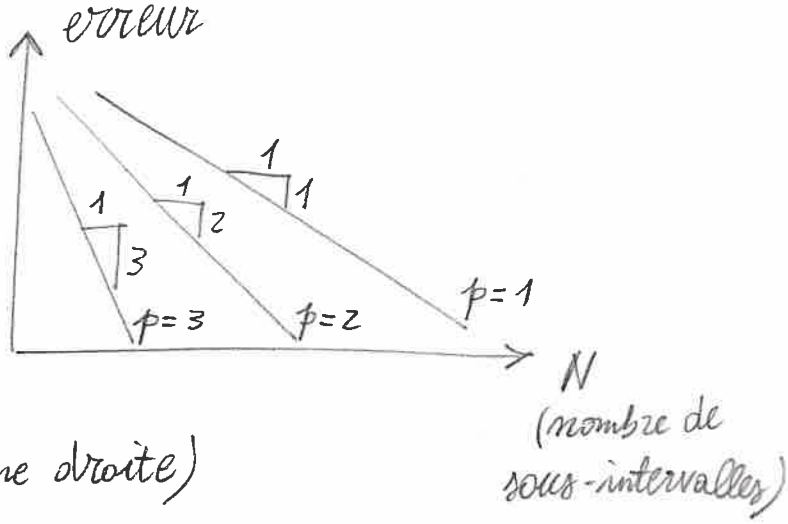
où $C = \max(C_0, \dots, C_{N-1})$. □

Remarque: avec les formules composées, on a que, si $f \in C^\infty$,

$$\lim_{N \to \infty} E_{s,N}(f) = \lim_{N \to \infty} C \left(\frac{b-a}{N}\right)^p (b-a) \cdot M_p = 0.$$

c.-à-d, on peut approcher l'intégrale d'une fonction régulière autant précis que l'on veut!

MATLAB $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



$E \approx \tilde{C} N^{-p}$

échelle log-log:

$\log E \approx -p \log N + \log \tilde{C}$ (une droite)

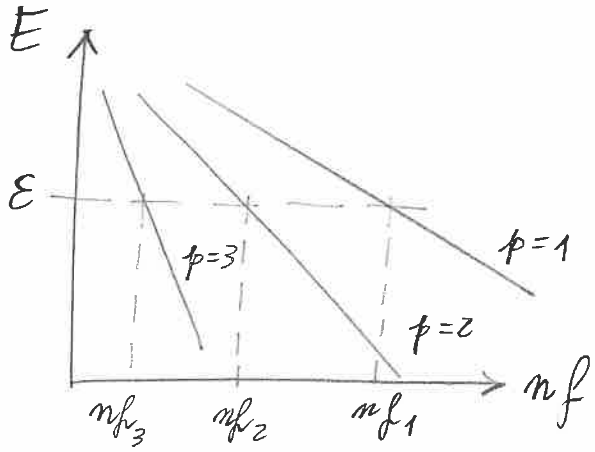
Erreur en fonction du "travail" pour évaluer la f. composée.

NC: ordre $p \rightsquigarrow s$ ou $s-1$ points sur chaque $[x_j, x_{j+1}]$

$\rightsquigarrow$ # évaluations de f $= nf \approx N \cdot s$

donc $E \approx \tilde{C} N^{-p} \approx \tilde{C}\, nf^{-p} s^p$

$$\log E \approx -p \log nf + \underbrace{\log(\tilde{C} s^p)}_{p,\, s \ldots \text{fixé} \ldots \text{constante}}$$



A parité d'erreur ε, les formules d'ordre supérieur utilisent moins d'évaluations de f (sont plus vites)!

4.3. Formules d'ordre supérieur

L'erreur des formules composées est petite si l'ordre p est grand.

Quel est l'ordre maximale pour une formule à s étages ?

- On a déjà vu que pour f.d.q. symétriques, avec s impair, l'ordre est toujours $s+1$!
- Est-ce qu'on peut choisir les noeuds t.q. on peut obtenir, pour une f.d.q. à s étages, un ordre supérieur à $s+1$? OUI.

Q :
- Quel est l'ordre maximal ?
- Quel choix des noeuds donne l'ordre maximal ?

Lemme 4.7 et Thm. 4.8. Soient $c_1, \ldots, c_s$ les noeuds d'une f.d.q p.

Alors : ⓐ $p \geq s+m$ ssi $\int_0^1 \underbrace{(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_s)}_{=:\, M(x)}\, q(x)\, dx = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}_{m-1}$.

ⓑ $p \leq 2s$. $\quad (m \in \mathbb{N}^*)$

Dém. ⓐ Observez $M(x) \in \mathbb{P}_s$ et non-nul.

L'ordre $p \geq s+m \iff \int_0^1 f(x)dx \underset{\text{par déf.}}{=} \sum_{i=1}^{s} f(c_i)b_i, \quad \forall f \in \mathbb{P}_{s+m-1}$ ⊛

La division euclidienne pour polynômes donne :

$$\frac{f(x)}{M(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{M(x)}, \quad \text{où } q \in \mathbb{P}_{m-1}, \ r \in \mathbb{P}_{s-1}$$

$f(x) = M(x)q(x) + r(x)$ dans ⊛ nous donne :

$$\int_0^1 M(x)q(x)dx + \cancel{\int_0^1 r(x)dx} = \sum_i \underbrace{M(c_i)}_{=0} q(c_i)b_i + \underbrace{\cancel{\sum_i r(c_i)b_i}}_{= \int_0^1 r(x)dx \text{ car } p \geq s}$$

$$\iff \int_0^1 M(x)q(x)\,dx = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{P}_{m-1}$$

□

ⓑ Par l'absurde. Suppose $p > 2s$, alors d'après ⓐ :

$$\int_0^1 M(x)q(x)dx = 0 \qquad \forall q \in \mathbb{P}_s \quad (p \geq 2s+1 = s + \underbrace{s+1}_{m})$$

Donc avec $q = M$ (choix particulier pour q) :

$$\int_0^1 (M(x))^2 dx = 0 \Rightarrow M(x) \equiv 0 \text{ sur } [0,1]$$

(contradiction car M est non-nul) □

Nous verrons dans la section suivante qu'il existe un polynôme M de degré s t.q. l'ordre est maximal ($2s$) en choisissant les noeuds comme les racines d'un tel $M(t)$.
(réponse à la deuxième question)

4.4. Les polynômes de Legendre

But : Trouver un polynôme $P_k(t)$ de degré k t.q.

$$\int_{-1}^{1} P_k(t)\, q(t)\, dt = 0 \qquad \forall q(t) \in \mathbb{P}_{k-1} \qquad (\mathrm{I})$$

(cfr. Lemme 4.7).

> **Thm 4.9.** Le polynôme de Legendre P_k existe pour tout $k = 0, 1, \ldots$ et son degré est exactement égal à k.

Remarques :
- $\int_{-1}^{+1}$ au lieu de $\int_0^1$
- Soient f et g des fonctions continues sur $[-1, 1]$.

On définit leur produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt \qquad (*)$$

$\left(\text{cfr. } \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i,\ \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n\right)$

Soit $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continue,

Propriétés du produit scalaire:

$\langle f + h, g\rangle = \langle f, g\rangle + \langle h, g\rangle$ ① linéaire

$\langle f, g\rangle = \langle g, h\rangle$ ② symétrique

$\langle \alpha \cdot f, g\rangle = \alpha \langle f, g\rangle,\ \alpha \in \mathbb{R}$ ③ linéaire

$\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ ④ norme "L_2"

- Donc (I) nous dit que P_k est orthogonale sur tous les polynômes de degré $< k$:

$$\langle P_k, q\rangle = 0 \implies \langle P_k, P_\ell\rangle = 0 \quad \text{si } k \neq \ell.$$

On peut montrer que $\{P_0(t), P_1(t), \dots, P_K(t)\}$ est une base orthogonale pour $\mathbb{P}_K$, c.-à-d.,

$$\forall q \in \mathbb{P}_K \quad \exists c_k \text{ t.q. } q(t) = c_0 P_0(t) + \dots + c_K P_K(t).$$

- P_K n'est pas unique : Soit $\tilde{P}_K(t) = \alpha P_K(t)$, $\alpha \neq 0$.

Alors $\forall q \in \mathbb{P}_{K-1}$: $\langle \tilde{P}_K, q \rangle = \alpha \langle P_K, q \rangle = 0$ et

$$\text{degré } \tilde{P}_K = K.$$

Solution : NORMALISER : $\|P_K\| = 1$ et $P_K(1) > 0$.

Dém : Par récurrence sur le degré K.

- Initialisation de la récurrence : VRAI pour $P_0(t) = 1$
  $\rightsquigarrow$ degré de $P_0 = 1$, pas de condition d'orthogonalité.
- Hérédité : Supposons vrai pour $\{P_0, P_1, \dots, P_{K-1}\}$. Trouvons P_K de la forme :

$$P_K(t) = Q(t) + a_0 P_0(t) + \dots + a_{K-1} P_{K-1}(t)$$

où $Q(t) = t \cdot P_{K-1}(t)$ (degré de $Q = K$)

et donc le degré de $P_K = K$, car degré de $P_\ell = \ell$, pour $\ell = 0, 1, \dots, K-1$

$\rightsquigarrow$ Condition nécessaire : pour $\ell = 0, \dots, K-1$:

$$0 = \langle P_K, P_\ell \rangle = \langle Q, P_\ell \rangle + a_0 \langle P_\ell, P_0 \rangle + \dots + a_{K-1} \langle P_\ell, P_{K-1} \rangle$$

$$\Longrightarrow \langle Q, P_\ell \rangle = -a_\ell \langle P_\ell, P_\ell \rangle, \text{ car } \langle P_\ell, P_j \rangle = 0, \ \ell \neq j.$$

$$\Longrightarrow \quad a_\ell = - \frac{\langle Q, P_\ell \rangle}{\| P_\ell \|^2} .$$

⇝ Montrons que P_K avec ces $a_0, \dots, a_{K-1}$ satisfait la condition d'orthogonalité ($\square$).

Soit $p \in \mathbb{P}_{K-1}$, alors :

$$p(t) = c_0 P_0(t) + \dots + c_{K-1} P_{K-1}(t).$$

(puisque $\{P_0, \dots, P_{K-1}\}$ est une base de $\mathbb{P}_{K-1}$)

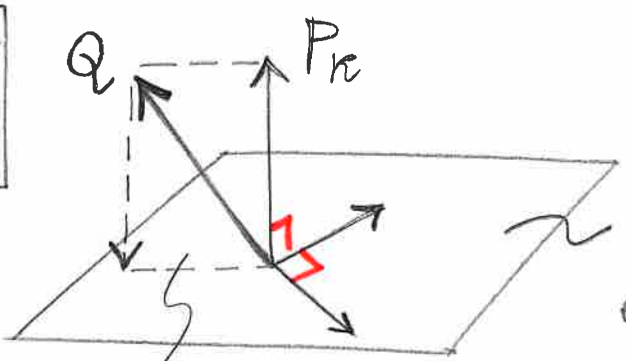
Donc $\langle p, P_K \rangle = c_0 \langle P_0, P_K \rangle + \dots + c_{K-1} \langle P_{K-1}, P_K \rangle$

$= 0$, car on a déjà $\langle P_K, P_\ell \rangle = 0$, $\ell \neq K$.

$\square$

Remarques: 1) P_K est obtenu par la méthode de Gram-Schmidt :

Interprétation géométrique :



polynômes orthogonaux

$\mathrm{Vect}\{P_0, P_1, \dots, P_{K-1}\}$ est le sous-espace engendré par $P_0, \dots, P_{K-1}$

projection orthogonale

$P_K = Q$ − la projection orthogonale de Q sur $\mathrm{Vect}\{P_0, \dots, P_{K-1}\}$

⇝ la même méthode que dans $\mathbb{R}^n$, mais ici avec $\langle f, g \rangle$

2) $a_\ell = -\dfrac{\langle t P_{k-1}, P_\ell \rangle}{\|P_\ell\|^2} = 0$ si $\ell+1 < k-1$ $(\ell < k-2)$

mais $\langle t P_{k-1}, P_\ell \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_{k-1}(t) \underbrace{t P_\ell(t)}_{\in \mathbb{P}_{\ell+1}} dt$

⇝ <u>récurrence à trois termes</u> :

$$\begin{cases} P_k(t) = t P_{k-1}(t) + a_{k-2} P_{k-2}(t) + a_{k-1} P_{k-1}(t) \\ P_0(t) \text{ et } P_1(t) \text{ donnés} \end{cases}$$

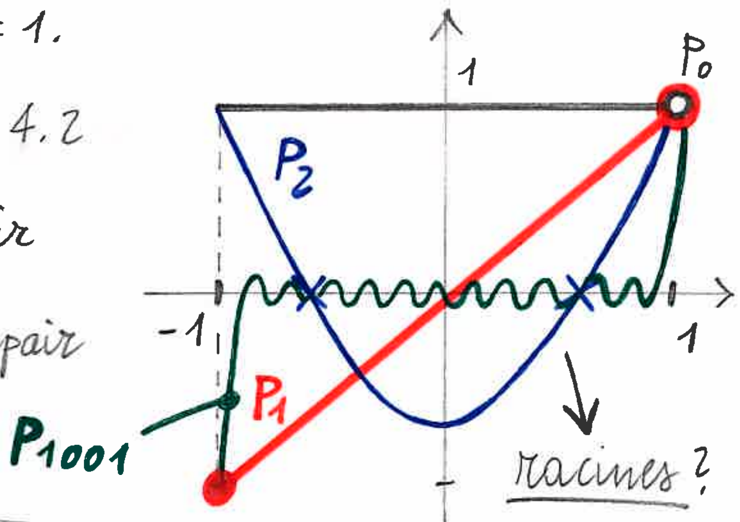
On peut montrer que (<u>Thm. 4.10</u>, pas de preuve)

$$\boxed{\begin{aligned} & P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t, \\ & P_{k+1}(t) = \frac{2k+1}{k+1}\, t\, P_k(t) - k\, P_{k-1}(t) \end{aligned}}$$

avec normalisation $P_k(1) = 1$.

3) <u>Exemples</u> dans la Figure 4.2

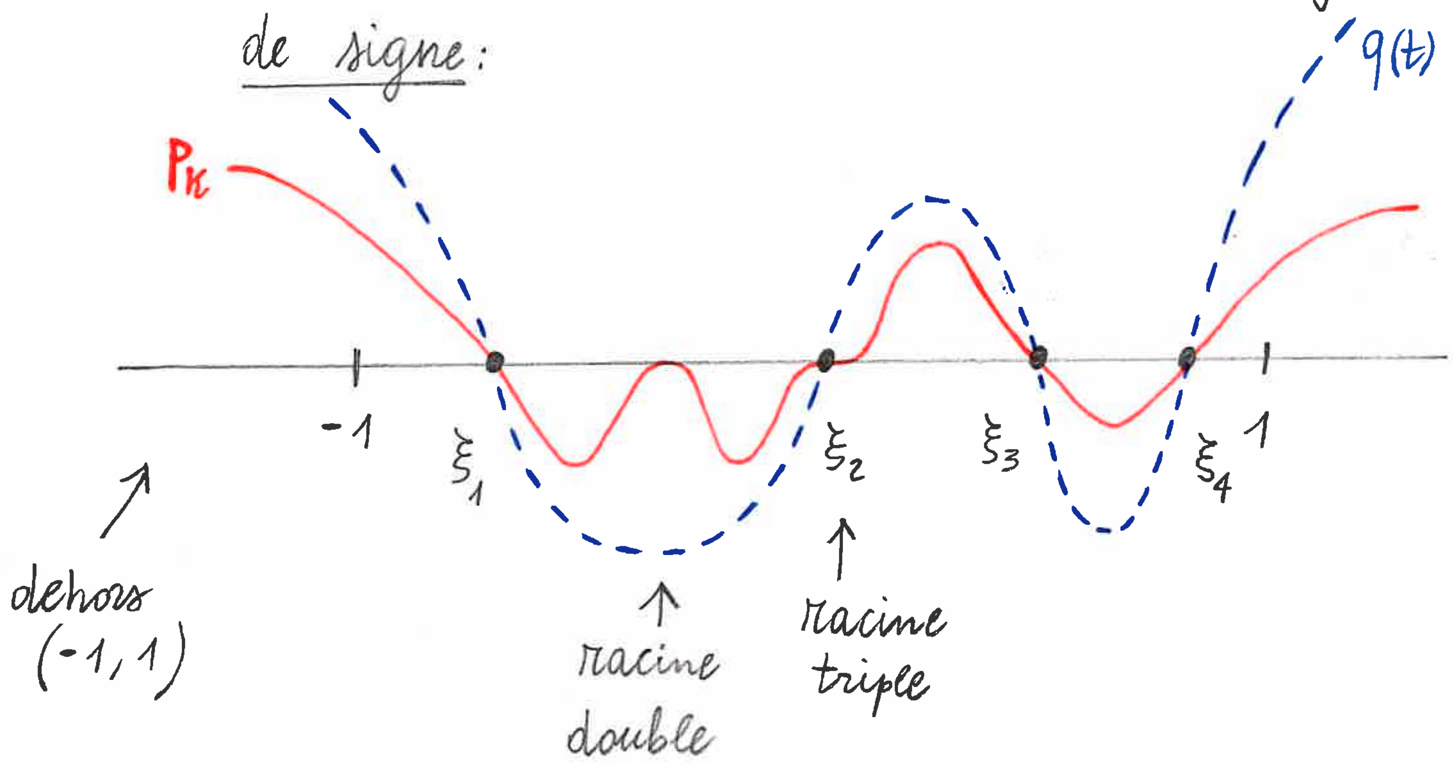
P_k est $\begin{cases} \text{pair si } k \text{ est pair} \\ \text{impair si } k \text{ est impair} \end{cases}$



<u>Thm 4.12.</u> Toutes les racines de $P_k(t)$ sont réelles, simples, et dans $(-1, 1)$.

- Racine <u>simple</u> : $P_K(\xi)=0$ mais $P_K'(\xi)\neq 0$
- $\deg P_K = K \Rightarrow K$ racines complexes en comptant leur <u>multiplicité</u>.

<u>Dém.</u> Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ toutes les racines réelles de P_K dans $(-1,1)$ où P_K <u>change de signe</u> :



Si $r=K$, la preuve est terminée car P_K a au max K racines réelles simples dans $(-1,1)$.

Supposons $r<K$ et prenons $q(t)=(t-\xi_1)\cdots(t-\xi_r)\in \mathbb{P}_r$

$\leadsto \langle P_K, q\rangle = 0$ car $r<K$.

Observez que la fonction $t\mapsto P_K(t)\cdot q(t)$ <u>ne change pas de signe</u> sur $(-1,1)$,

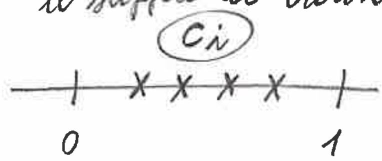
$\leadsto \int_{-1}^{1} P_K(t)\,q(t)\,dt \neq 0$ $\lightning$ contradiction $\square$

4.5. Formules de Gauss

Utilisons les polynômes de Legendre pour construire une formule de quadrature d'ordre maximal

$$\sum_{i=1}^{s} b_i f(c_i), \text{ ordre } p,$$

il suffit de trouver les c_i

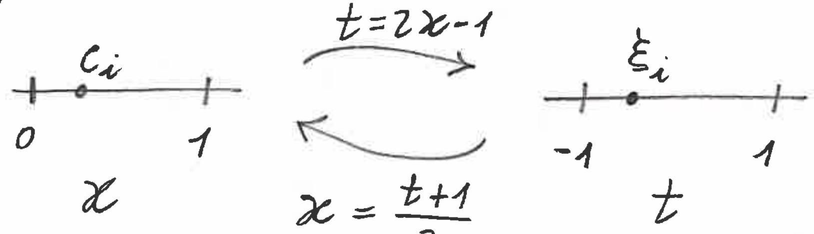


D'après le Thm. 4.8 : $p = 2s$ $(m = s)$ si

$$\int_0^1 (x-c_1)\cdots(x-c_s)\, q(x)\, dx = 0, \quad \forall q \in \mathbb{P}_{s-1}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2}\right)^s (t-\xi_1)\cdots(t-\xi_s)\, \hat{q}(t)\, \frac{dt}{2} = 0, \qquad \forall \hat{q} \in \mathbb{P}_{s-1}$$

Changement de variable : $\quad dt = 2dx$



définissons : • $\xi_i = 2c_i - 1 \rightsquigarrow c_i = \frac{\xi_i + 1}{2} \rightsquigarrow x - c_i = \frac{t+1}{2} - \frac{\xi_i+1}{2} = \frac{1}{2}(t-\xi_i)$

• $\hat{q}(t) = q\left(\frac{t+1}{2}\right)$ où $q \in \mathbb{P}_{s-1} \rightsquigarrow \hat{q} \in \mathbb{P}_{s-1}$

<u>e.g.</u> $a_k \left(\frac{t+1}{2}\right)^s = a_k \left(\frac{t}{2}\right)^s + \ldots \quad \deg \leq s$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} (t-\xi_1)\cdots(t-\xi_s)\, \hat{q}(t)\, dt = 0, \quad \forall \hat{q} \in \mathbb{P}_{s-1} \qquad (X)$$

Prenons <u>ξ_i les racines de P_s</u> (le polynômes de Legendre de deg. s),

$\rightsquigarrow P_s(t) = C_s (t-\xi_1)\cdots(t-\xi_s)$ et $\langle P_s, \hat{q} \rangle = 0$

$\rightsquigarrow (X)$ est satisfaite !

Puisque $\xi_i \in (-1,1)$ et distinctes, les $c_i \in (0,1)$ et distinctes aussi. On a obtenu une formule de quadrature d'ordre $2s$, ce qui est maximal ! $=$ $\boxed{\text{Formules de quadrature de Gauss !}}$