Série 10.

Ex. 1

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas carrée, donc pas inversible.

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ <u>N.B.</u> : $L_3 = 3L_1 - L_2$

Donc $rg(D) \neq 3 \rightsquigarrow D$ n'est inversible.
$(\det(D) = 0)$

5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ E est carrée et triangulaire supérieure.

$E \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & & 1 \end{array}\right)$$

Après, on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$. On continue de cette façon jusqu'à L_{n-1} est remplacée par $L_{n-1} - L_n$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & & 1 & -1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & & 1 \end{array}\right)$$

Finalement, on obtient

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

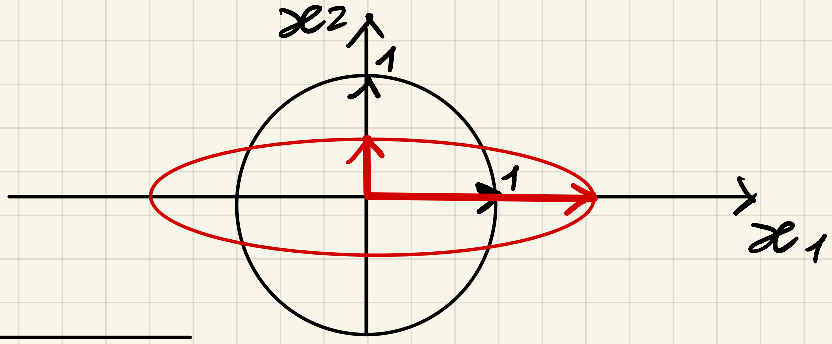
$$(E^{-1})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \qquad i,j = 1, \dots, n$$

Ex. 2

Soit $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. $\quad x \mapsto Ax$?

(a) si A est diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{où } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

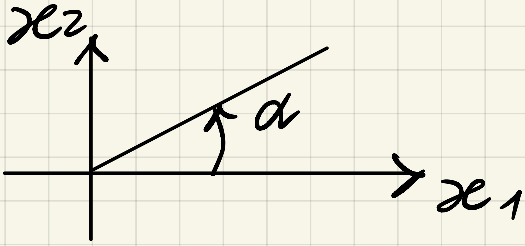


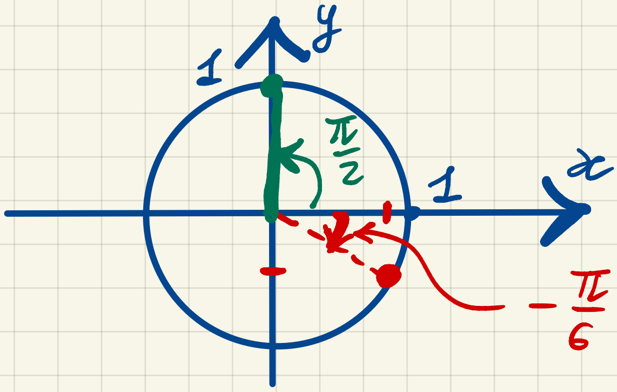
par exemple pour $\lambda_1 > 1$ et $\lambda_2 < 1$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, alors $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ homothétie par λ

(b) si A est une matrice de rotation d'angle α alors transformation d'angle α





2. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Rappel</u> : matrice de rotation d'angle α :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(a) $D = Q^{-1}AP$ donne une matrice diagonale.

Q^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}}}_{=: Q^{-1}}$$

$$D = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}/2 & -3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A = QDP^{-1}$ décomposition aux valeurs singulières. (S.V.D.)

$\phi = -\frac{\pi}{6}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(Donc l'angle associé à P^{-1} est $-\phi$, c.-à-d., $\frac{\pi}{6}$)

$x \mapsto Q(D(P^{-1}x))$

Ex. 3 $\quad rg\, A = rg(A^T)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -6 & -13 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & -1 \\ 0 & -6 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto rg(A) = 2$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & 5 & -13 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow 2L_4 - 3L_1]{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 11 & -22 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow 3L_4 + L_2]{L_3 \leftarrow L_3 + 11 L_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto rg(A^T) = 2$$

On a bien $rg(A) = rg(A^T)$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \leadsto rg(B) = 2$$

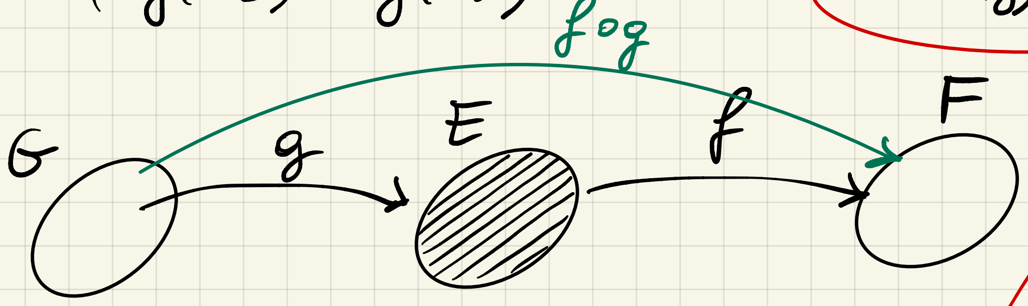
$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow rg(B^T) = 2$$

Ex. 4

1. $f : E \to F$ et $g : G \to E$ $\quad$ g surjective (donc on a $Im(g) = E$)

M.q. $rg(f \circ g) = rg(f)$.

$(rg(AB) = rg(A))$



<u>Rappel</u> : $rg(g) := \dim(Im(g))$

$$Im(f \circ g) = \{(f\circ g)(x) \mid x \in G\} = f(\{g(x) \mid x \in G\})$$

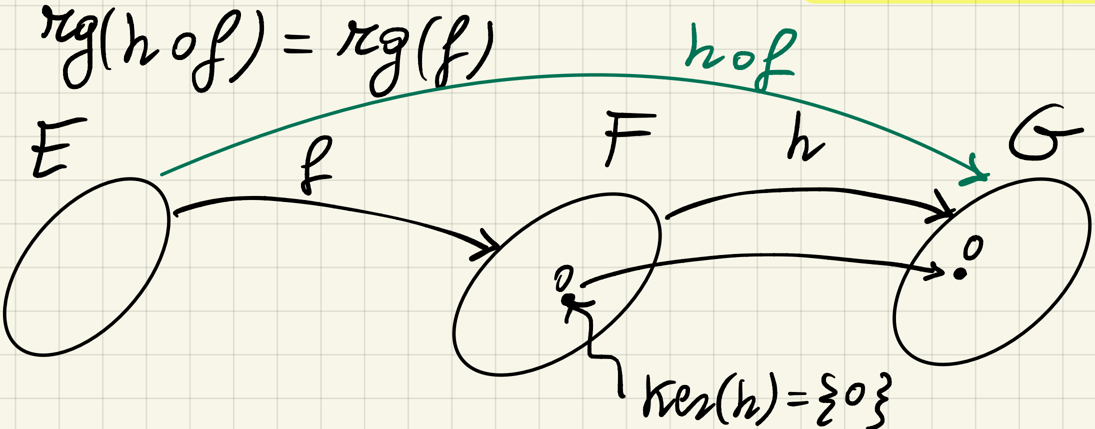
$$= f(Im(g)) = f(E) = Im(f)$$

On prend la dim aux deux cotés :

$$rg(f \circ g) = rg(f) \quad \blacksquare$$

2. $f : E \to F$ et $h : F \to G$, $\quad$ h injective

M.q. $rg(h \circ f) = rg(f)$



On remarque : $\mathrm{Ker}(h\circ f) := \{x\in E \mid \underbrace{(h\circ f)(x) = 0}_{h(f(x))=0}\} =$

$h(f(x))=0$ et h est injective implique $f(x)=0$ $\Rightarrow$ $= \{x\in E \mid f(x)=0\} =: \mathrm{Ker}(f)$

Donc $\mathrm{Ker}(h\circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

Par le théorème du rang pour $h\circ f$:

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(h\circ f)) + \mathrm{rg}(h\circ f)$$

Donc :

$$\mathrm{rg}(h\circ f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(h\circ f)) \overset{!}{=} \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f)$$

$\square$

4.3 M.q. une matrice $A\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est inversible ou nulle ssi $\Leftrightarrow$ $\forall M\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(MA)$.

inversible $\rightsquigarrow$ $\mathrm{rg}(A) = n$ ("plein rang")

nulle $\rightsquigarrow$ 0_n

Indication : si $\nexists A^{-1} \Rightarrow \exists X\in\mathbb{R}^n, X\neq 0$, t.q. $AX=0$.
Poser $M = XY^T$. $(:X\in \mathrm{Ker}(A))$

Preuve : "$\Rightarrow$" • Si $A = 0_n$ alors $\forall M\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ on a $AM = 0_n = MA$, et donc $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(MA)$.

• Si A est inversible alors la fonction associée est une bijection. Comme elle est en particulier INJECTIVE, alors, par l'ex. 4.2, $\forall M\in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M)$.
Comme la fonction associée à A est aussi

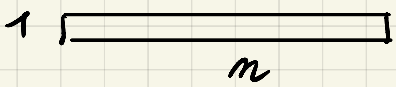
SURJECTIVE, alors, par l'ex. 4.1, $rg(M \cdot A) = rg(M)$.
Donc on a $rg(AM) = rg(MA)$.

"$\Leftarrow$" On suppose que $\forall M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on a $rg(AM) = rg(MA)$ et que A n'est pas inversible.
Alors, $\exists X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, t.q. $AX = 0$, i.e., $X \in Ker(A)$. On pose $M = XY^T$ pour un certain $Y \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi $rg(AM) = rg(AXY^T) = rg(0) = 0$

Donc $rg(XY^TA) = 0 \rightsquigarrow XY^TA = 0$.

Comme $X \neq 0$, alors $\underbrace{Y^T}_{= \text{ vecteur ligne de longueur } n} A = 0, \quad \forall Y \in \mathbb{R}^n$.



Autrement dit, on a $A^T Y = 0$ (transposée)
Mais $Y \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur quelconque et en général $Y \notin Ker(A^T)$, cela implique que $A^T = O_n$, c-à-d., $A = O_n$. ■