Série 11.

Ex.1

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$ = deux lignes lin. dépendantes $= 0$

2. $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$(-1)^{i+j}$ $\boxed{\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}}$

→ dév. par rappor à L_1

3. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = +abc + abc = 2abc$

Règle de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \; - \\ 0 & a & b & 0 & a \\ a & 0 & c & a & 0 \\ b & c & 0 & b & c \end{array} = abc + abc = 2abc$$

4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \underline{abc(b-a)(c-a)(c-b)}$

$C_3' = C_3 - C_1$

$C_2' = C_2 - C_1$

dév. p.r. à L_1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$= (b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a) =$

$= (b-a)(c-a)(c+a) - (b-a)(b+a)(c-a)$

$= (b-a)(c-a)[c+\cancel{a} - (b+\cancel{a})] = (b-a)(c-a)(c-b)$

5. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

En faisant les opérations sur les colonnes: $C_3' = C_3 - C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 2c \\ 2c^2 \\ 2c^3 \end{pmatrix}$

$C_2' = C_2 - \frac{1}{2}C_3'$

$C_1' = C_1 - C_2'$

$$= \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ a^2 & b^2 & 2c^2 \\ a^3 & b^3 & 2c^3 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$C_2' = C_2 - 5C_1$$
$$C_3' = C_3 - 7C_1$$
$$C_4' = C_4 - 9C_1$$

dév. p.r. à L_1

6. $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 16 & 24 & 33 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5-5 & 7-7 & 9-9 \\ 3 & 16-15 & 24-21 & 33-27 \\ 5 & 27-25 & 36-35 & 55-45 \\ 7 & 38-35 & 51-49 & 78-63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 10 \\ 7 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= (+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{vmatrix}$$

Règle de Sarrus :

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \;\; - \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 10 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 15 & 3 & 2 \end{array} = 15 + \cancel{90} + 24 - 18 - 20 - \cancel{90}$$

$$= 39 - 38 = 1.$$

7. $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4' = L_4 - L_3} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3' = L_3 - L_2} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2' = L_2 - L_1} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

Ex. 2

1.

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & 0 & \\ & 1 & 1 & -1 & & & \\ & & 1 & 1 & -1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & 1 & 1 & -1 \\ & & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

matrice TRIDIAGONALE $n \times n$

Base: On a $F_1 = |1| = 1$ et $F_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

On a bien que $F_1 = f_1$ et $F_2 = f_2$.

Pas de récurrence: Soit $n > 2$.

Dév. p.r. à L_1:

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & & & & \\ 0 & & 1 & 1 & -1 & & & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & 0 & & 1 & 1 & -1 & \\ 0 & & & & & 1 & 1 & -1 \\ 0 & & & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot F_{n-1} - (-1) F_{n-2}$$

dév. p.r. à C_1

F_{n-1} $\quad$ F_{n-2}

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \underset{\text{hyp. récurrence}}{=} f_{n-1} + f_{n-2} \underset{\text{Fibonacci}}{=} f_n \qquad \checkmark$$

2.

$$T_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & & & \\ & x & 1+x^2 & x & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & x & 1+x^2 & x & \\ & 0 & & & x & 1+x^2 & x \\ & & & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

matrice TRIDIAGONALE $n \times n$

M.q. $T_n(x) = \dfrac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$ $\forall n \geq 1$, $x^2 \neq 1$.

<u>Base</u>: $n=1$: $T_1(x) = 1+x^2 = \dfrac{1-x^4}{1-x^2}$ $\quad 1-x^4 = (1-x^2)(1+x^2)$ ✓ ok

<u>Pas de récurrence</u>: On suppose que pour tout $k \leq n-1$, $n>1$ on a $T_k(x) = \dfrac{1-x^{2k+2}}{1-x^2}$. Alors

dév. p.r. à L_1

$$T_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & & \\ & x & 1+x^2 & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & x & 1+x^2 & x \\ & 0 & & & x & 1+x^2 & x \\ & & & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

dév. p.r. à C_1

$T_{n-2}(x)$

$= (1+x^2) \cdot T_{n-1}(x) - x \cdot x \, T_{n-2}(x) =$

$= (1+x^2) \cdot \dfrac{1-x^{2(n-1)+2}}{1-x^2} - x^2 \cdot \dfrac{1-x^{2(n-2)+2}}{1-x^2} = \ldots = \dfrac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$

✓ ok

3.

$$C_n(x) = \begin{vmatrix} x & & & & & & a_0 \\ -1 & x & & & 0 & & a_1 \\ & -1 & x & & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & & -1 & x & & a_{n-2} \\ & & & & -1 & x & a_{n-1} \\ & & & & & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

matrice $(n+1)\times(n+1)$

M.q. $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

__Base:__ si $n=0$, on a $|a_0| = a_0$. ✓ OK Si $n=1$, $\begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & a_1 \end{vmatrix} = $
$= a_1 x + a_0$ ✓ OK

__Pas de récurrence:__ dév. p.r. L_1

$$C_n(x) = \begin{vmatrix} x & & & & & & a_0 \\ -1 & x & & & 0 & & a_1 \\ & -1 & x & & & & a_2 \\ & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & & -1 & x & & a_{n-2} \\ & & & & -1 & x & a_{n-1} \\ & & & & & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

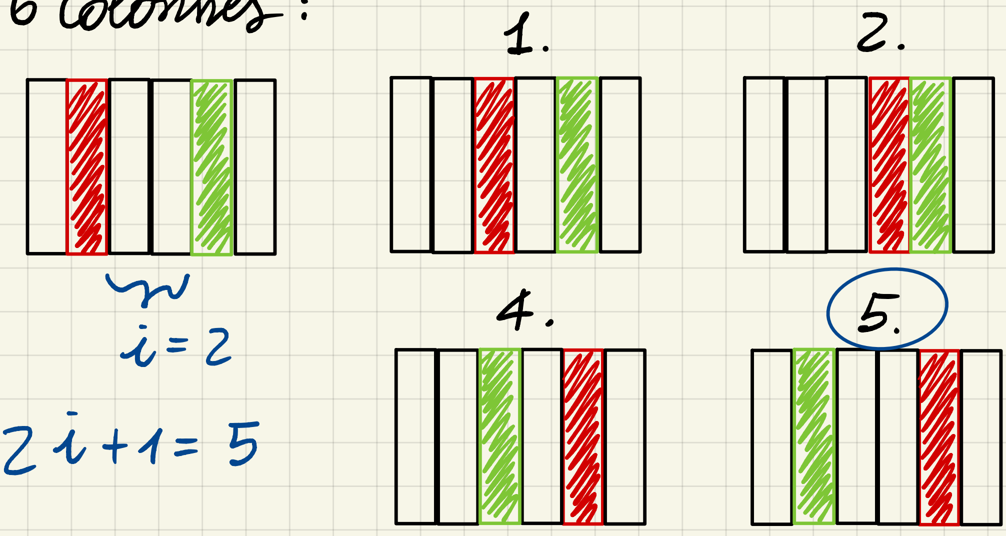
$$= x \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^k}_{\text{par hyp. de récurrence (matrice de taille } n)} + (-1)^{n+2} a_0 \cdot (-1)^n$$

$= (-1)^{2n+2} = +1$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$ ✓ OK

Ex. 4

matrice avec
6 colonnes :



$2i + 1 = 5$

5 échanges !
Donc on peut considérer i comme le nombre de colonnes qui separent la rouge et la verte.

<u>Base</u> : Si $i = 0$, il suffit un échange.

<u>Pas de récurrence</u> : On suppose qu'on peut échanger 2 colonnes séparées par i colonnes avec $2i+1$ échanges et on considère 2 colonnes séparées par $i+1$ colonnes.

1e colonne : $k$ème colonne

2e colonne : $(k+1+i+1)$ème

On fait :

- 1er échange entre $(k+1+i+1)$ème colonne et la $(k+1+i)$ème colonne
- Par hyp. de récurrence, on peut échanger la $k$ème colonne avec la $(k+1+i)$ème colonne en $2i+1$ échanges
- dernier échange entre la $(k+1+i+1)$ème colonne et la $(k+1+i)$ème colonne

Somme des échanges : $1 + 2i+1 + 1 = 2i+3 = \underline{\underline{2(i+1)+1}}$ ✓