Série 13.

2. Polynôme caractéristique

<u>Thm.</u> Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.
Alors, le pol. car. $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ satisfait

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0,$$

où $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

(a) Formule explicite du déterminant (Prop. 4.10) (p. 112)

D'après cette formule, on a :

$$p_A(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n} (A - \lambda \cdot I_n)_{\sigma(i),i}$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (A)_{\sigma(i),i} - \lambda \cdot (I_n)_{\sigma(i),i}$$

(b) Une de ces permutations σ est l'identité (c-à-d, $\sigma(i) = i$, pour $i = 1, \dots, n$), donc,

$$p_A(\lambda) = \underbrace{(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)}_{①} + \underbrace{\sum_{\sigma \in \hat{S}_n} (A)_{\sigma(i),i} - \lambda \cdot (I_n)_{\sigma(i),i}}_{②}$$

où $\hat{S}_n$ est l'ensemble de toutes permutations de taille n sauf l'identité.

Le terme ① peut s'écrire comme

$$① = (-1)^n \lambda^n + \text{polynôme en } \lambda \text{ de degré} \leq n-1.$$

(c) On remarque que pour toute permutation σ qui n'est pas l'identité, il existe i, j t.q. $i \neq j$, $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$. (N.B. on est en dehors de la diagonale principale). Donc une telle permutation σ choisira au max $n-2$ éléments sur la diagonale de $A - \lambda I_n$. Le degré de chaque polynôme dans ② est donc $\leq n-2$. $\blacksquare$

3. Pol. car., spectre et vecteurs propres

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(5-\lambda) - 4\cdot(-2) = \lambda^2 - 6\lambda + 13$$

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(2-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

(b) $$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid p_A(\lambda) = 0\} = \emptyset$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4\cdot 13 = 36 - 52 < 0$$ pas de sol. en $\mathbb{R}$

$$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid p_A(\lambda) = 0\} = \{3-2i,\ 3+2i\}$$

On cherche un vect. propre de A associé à $\lambda_1 = 3-2i$: on prend $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$, on a :

$$A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}, \qquad (A - \lambda_1 I_2)\vec{v} = \vec{0},$$

$$\begin{bmatrix} -2+2i & -2 \\ 4 & 2+2i \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2+2i & -2 & 0 \\ 4 & 2+2i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+(1+i)L_1} \left[\begin{array}{cc|c} -2+2i & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

d'où $v_2 = (-1+i)v_1$. Donc en choisissant $v_1 = 1$, on a que $\vec{v} = (1, -1+i)$ est un vect. propre associé à $\lambda_1 = 3-2i$.

Ex. 4. Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.

(a) M.q. A et A^T ont les mêmes valeurs propres.

On utilise la déf. du pol. car. $p_A(\lambda)$ et le fait que $\det(A) = \det(A^T)$:

$$\begin{aligned} Sp_{\mathbb{K}}(A) &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid p_A(\lambda) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \det(A - \lambda I) = 0\} = \\ &\overset{\det(A)=\det(A^T)}{=} \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \det((A-\lambda I)^T) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \det(A^T - \lambda I) = 0\} \overset{(\text{déf})}{=} Sp_{\mathbb{K}}(A^T) \end{aligned}$$

$\square$

(b) Prouver que si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A^*)$, alors $\bar{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$.

$\Big(A^* := \overline{(A^T)} = (\bar{A})^T$, et satisfait les propriétés :

$(A+B)^* = A^* + B^*$ et $(AB)^* = B^* A^* \Big)$

<u>Preuve</u> : Par la Prop. 6.3, on a que $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A^*)$ si et seulement si ($\Longleftrightarrow$) $\det(A^* - \lambda I) = 0$.

<u>À voir</u> : $\det(A - \bar{\lambda} I) = 0$ ($\Rightarrow \bar{\lambda} \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$).

On a : $\circledast$

$$A - \bar{\lambda} I \underset{A=\bar{\bar{A}},\ I=\bar{I}}{=} \bar{\bar{A}} - \bar{\lambda}\bar{I} \underset{\bar{\lambda}\cdot\bar{I} = \overline{\lambda I}}{=} \bar{\bar{A}} - \overline{\lambda I} \underset{\bar{A}-\bar{B} = \overline{A-B}}{=} \overline{\bar{A} - \lambda I}$$

Ainsi, on a :

$$\boxed{\det(A - \bar{\lambda} I)} \overset{\circledast}{=} \det\left(\overline{\bar{A} - \lambda I}\right) = \overline{\det(\bar{A} - \lambda I)}$$

$\det(A) = \det(A^T)$

$$= \overline{\det((\bar{A} - \lambda I)^T)}$$

$$= \overline{\det((\bar{A})^T - \lambda I)}$$

$$\overset{(\text{déf. } A^*)}{=} \overline{\det(A^* - \lambda I)} = \bar{0} = \boxed{0}$$

Finalement : $\det(A - \bar{\lambda} I) = 0$ $\blacksquare$