Série 8.

Ex 1.

(a) $f : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ définie par $p \mapsto \int_0^1 p(x)\,dx$.

i. M.q. f est linéaire.

Soient p et $q \in \mathbb{R}_1[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $f(\lambda p+q) \overset{?}{=} \lambda f(p) + f(q)$

$$f(\lambda p+q) = \int_0^1 (\lambda p+q)(x)\,dx = \int_0^1 \lambda p(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,dx$$

$$= \lambda \int_0^1 p(x)\,dx + \int_0^1 q(x)\,dx = \lambda f(p) + f(q) \quad \text{OK}$$

ii. Trouver une base pour $\text{Ker}(f)$.

Soit $p(x) = ax+b \in \mathbb{R}_1[x]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$\text{Ker}(f) = \{ p \in \mathbb{R}_1[x] \mid f(p) = 0 \}$

$\rightsquigarrow \int_0^1 ax+b\,dx = 0 \rightsquigarrow \left[a\frac{x^2}{2} + bx + C \right]\Big|_0^1 = 0$

$\rightsquigarrow \frac{1}{2}a + b = 0 \rightsquigarrow b = -\frac{1}{2}a$,

c-à-d., $\text{Ker}(f) = \{ p(x) = ax - \frac{1}{2}a,\ a \in \mathbb{R} \}$

$p(x) = ax - \frac{1}{2}a = a\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right) \right\} \rightsquigarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 1$

iii. Trouver une base de $\text{Im}(f)$.

$\text{Im}(f) = \{ \frac{1}{2}a + b,\ \text{où } a, b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$ $\quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = 1$

Une base est donnée par $\{1\}$, et $\dim(\text{Im}(f)) = 1$

iv. Théor. du rang: $\underbrace{\dim(\mathbb{R}_1[x])}_{2} = \underbrace{\dim(\text{Ker}(f))}_{1} + \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_{1}$

ok ✓

$p(x) = ax+b = a \cdot (x) + b \cdot (1)$

$\mathbb{R}_1[x] = \mathrm{Vect}\{1, x\}$ $\quad\quad$ $\dim(\mathbb{R}_1[x]) = 2$

$\mathrm{Im}(f)$: $\left(\frac{1}{2}a + b\right)\cdot(1)$

(b) $g : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, déf. par $A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^T)$

(§4, ex. 1)

i. Soient $M, N \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$g(\lambda M + N) \stackrel{?}{=} \lambda g(M) + g(N)$$

$$g(\underline{\lambda M + N}) = \frac{1}{2}(\lambda M + N + (\lambda M + N)^T) = \frac{1}{2}(\lambda M + N + \lambda M^T + N^T)$$

$$= \lambda \frac{1}{2}(M + M^T) + \frac{1}{2}(N + N^T) = \lambda g(M) + g(N) \quad \text{ok} \checkmark$$

ii. $\mathrm{Ker}(g) = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid g(A) = 0\}$

$\rightsquigarrow \frac{1}{2}(A + A^T) = 0 \rightsquigarrow A = -A^T$, c.-à-d., $\mathrm{Ker}(g)$ est formé par les matrices ANTISYMÉTRIQUES de taille 2.

(voir notation S4, ex1) On peut écrire $\mathrm{Ker}(g) = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$.

Une base pour $\mathrm{Ker}(g)$ est donnée par $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$.

$\left(\forall M \in \mathcal{A}_2(\mathbb{R})\right.$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, où $\left. c \in \mathbb{R}\right)$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1$.

iii. $\mathrm{Im}(g) = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid g(A)\}$; $g(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ nous donne la partie symétrique de A. On peut écrire $\mathrm{Im}(g) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

$\forall M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_2} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3}$$

Une base pour $\mathrm{Im}(g)$ est donnée par $\{E_1, E_2, E_3\}$.

Donc $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 3$.

iv. $\dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$

$4 = 1 + 3$ ✓

$M \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ quelconque :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

Ex. 2 E esp. vect. de dimension n, F un S.E.V. de E de dimension p.

$\mathcal{B}_F = \{b_1, \dots, b_p\}$ base de F, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_p, b_{p+1}, \dots, b_n\}$ de E.

On note aussi $G = \mathrm{Vect}\{b_{p+1}, \dots, b_n\}$.

$E = F \oplus G$.

(a) $t : x \mapsto a + x$ translation de vecteur $a \neq 0$

On remarque que $t(0) = a$, avec $a \neq 0$, donc t n'est pas linéaire.

(b) Soit π la projection sur F, définie par :

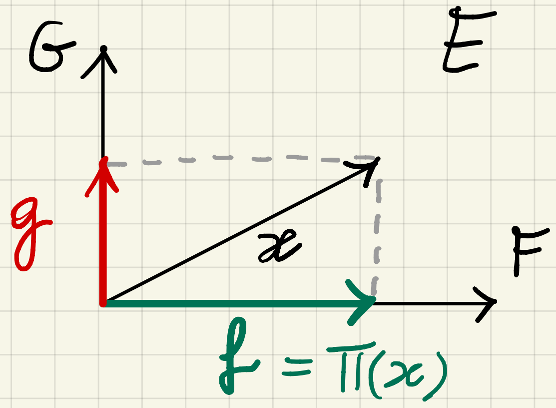
$$\pi(b_i) = \begin{cases} b_i & \text{si } i \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\pi(x)$? pour $x \in E$

$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in E$, alors : $\pi(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i$.

Alors $x = f + g$, avec $\underset{\substack{\cap \\ F}}{f} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i b_i$ et $\underset{\substack{\cap \\ G}}{g} = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i b_i$

alors $\pi(x) = f$.



(dessin $n=2,\ p=1$)

$$M(\Pi)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Matrice qui représente Π dans la base $\mathcal{B}$:
$(n\times n)$

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & O_{p\times(n-p)} \\ \hline O_{(n-p)\times p} & O_{(n-p)} \end{array}\right)$$

$$\overbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_p & O_{p\times(n-p)} \\ \hline O_{(n-p)\times p} & O_{(n-p)} \end{array}\right)}^{M(\Pi)}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\\ x_{p+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}}^{\vec{x}}$$

Noyau de Π : Si $x=f+g$, on a que $\Pi(x)=0$ ssi $f=0$
c.-à-d., $x=g\in G$, c.-à-d., $\mathrm{Ker}(\Pi)=G$.

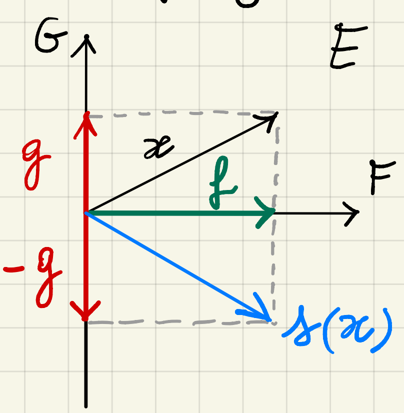
Image de Π : Si $x=f+g$, on a $\mathrm{Im}(\Pi)=F$, car $\Pi(x)=f$.

Rang de Π : $\dim(\mathrm{Im}(\Pi))=\underbrace{\dim(E)}_{=n}-\underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(\Pi))}_{=n-p}=p$

(c) : s symétrie par rapport à F parallèlement à G déf. par
$$s(v)=\begin{cases} v & \text{si } v\in F\\ -v & \text{si } v\in G\end{cases}$$

$s(x)$ pour $x\in E$?

Si $x=f+g$, avec $f\in F$ et $g\in G$, alors $s(x)=f-g$.



(dessin $n=2,\ p=1$)

La matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & O \\ \hline O & -I_{(n-p)} \end{array}\right)$$

pour $n=2$ et $p=1$ on a
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Noyau de s : Si $s(x) = f - g = 0$, alors on a $f = g$ et de plus, comme $F \cap G = \{0\}$ (car $E = F \oplus G$), donc $f = g = 0$, et donc $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(s) = \{0\}$.
($\dim(\mathrm{Ker}(s)) = 0$)

Rang de s : $\dim(\mathrm{Im}(s)) = \underbrace{\dim(E)}_{n} - \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(s))}_{0} = n$

En fait $\mathrm{Im}(s) = E$.

M.q. $s = 2\Pi - \mathrm{Id}$.

On peut vérifier aussi que $M(s) = 2M(\Pi) - I_n$

$$M(s) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_{(n-p)} \end{array}\right) \qquad M(\Pi) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p\times(n-p)} \\ \hline 0_{(n-p)\times p} & 0_{(n-p)} \end{array}\right)$$

Pour $x \in E$, si $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, alors
$2\Pi(x) - x = 2f - (f+g) = f - g = s(x)$
Comme cela est vrai $\forall x$, on a : $s = 2\Pi - \mathrm{Id}$.