UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Algèbre I
Corrigé - Série 10

12 novembre 2020
à rendre au plus tard
19 novembre 2020

Exercice 1. Inverse d'une matrice À l'aide de la méthode du pivot, dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si oui, donner l'inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

NB: $2C_3 - C_2 = C_1$

5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   E est une matrice carrée.
   E est une matrice triangulaire supérieure.

Solution:

1. L'inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet,

SKIP

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - 2L_1 \quad L_3 \mapsto L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \mapsto L_1 + L_3 \quad L_2 \mapsto L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. La matrice B n'est pas carrée donc elle n'est pas inversible.

3. L'inverse de C est $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. En effet,

SKIP

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - 2L_1 \quad L_3 \mapsto L_1 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \mapsto L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \mapsto L_1 + L_3 \quad L_2 \mapsto L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

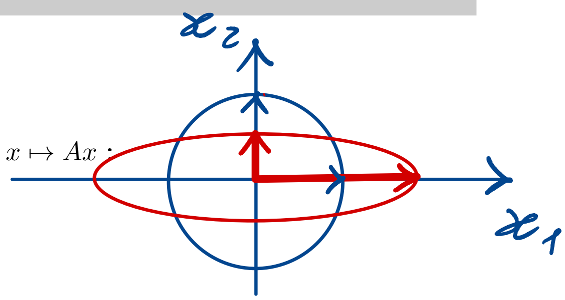
$$\xrightarrow{L_3 \mapsto -L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

4. Soient C_1, C_2 et C_3 les trois vecteurs colonnes de la matrice D alors $2C_3 - C_2 = C_1$. Ainsi le rang n'est pas maximal et la fonction associée pas surjective. Donc la matrice D n'est pas inversible.

5. L'inverse de E est $E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En effet, échelonnons le coté gauche de la matrice suivante,

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

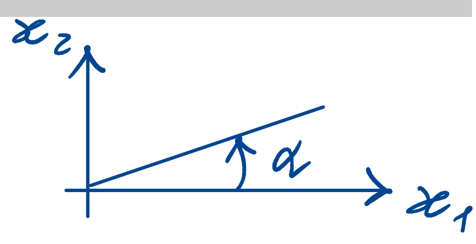
Pour la première ligne L_1, on la remplace par $L_1 - L_2$ ainsi on obtient à droite le vecteur ligne: $(1, -1, 0, ..., 0)$. On fait ensuite la même transformation pour la ligne L_2 i.e. on la remplace par $L_2 - L_3$. On continue ces transformations jusqu'à L_{n-1} remplacé par $L_{n-1} - L_n$.



Exercice 2. Matrice de passage

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Expliquer la signification géométrique de $x \mapsto Ax$:
   (a) si A est diagonale; ⇝ 2 cas
   (b) si A est une matrice de rotation.

Solution: Si A est diagonale avec le même coefficient λ sur les deux lignes alors la fonction associée est une homothétie par λ. Si le coefficient est différent alors il s'agit d'une compression et/ou une dilatation le long des axes (compression si le coefficient est plus petit que 1, dilatation sinon).
Si A est une matrice de rotation d'angle α alors la fonction associée sera aussi une rotation d'angle α.



Rappel : matrice de rotation d'angle α :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

(S.V.D.)

On peut la voir comme une décomposition d'une transformation en terme de transformations élémentaires

et deux matrices de passage (observez qu'elles sont des matrices de rotation dans $\mathbb{R}^2$)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer explicitement que le changement de base $D = Q^{-1}AP$ donne une matrice diagonale.

(b) La décomposition matricielle de A comme $A = QDP^{-1}$, avec P et Q matrices de rotation et D matrice diagonale, est appelée *décomposition aux valeurs singulières*. En considérant cette décomposition, expliquer quel est l'effet de A comme transformation linéaire $x \mapsto Q(D(P^{-1}x))$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$. Trouver les angles ϕ et θ associés aux matrices P et Q respectivement.

Solution:

(a) D'abord calculons la matrice inverse de Q:

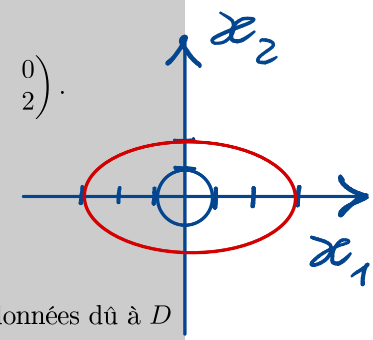
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \mapsto -L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Q^{-1}

Maintenant calculons explicitement $Q^{-1}AP$:

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

C'est bien une matrice diagonale.



(b) Ici, l'angle $\phi = \frac{-\pi}{6}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. Donc appliquer $A = QDP^{-1}$ signifie:

- ⋆ D'abord une rotation d'angle $-\phi$ dû à P^{-1}
- ⋆ Puis une dilatation de 3 le long de l'axe des abscisses et de 2 le long de l'axe des ordonnées dû à D
- ⋆ Enfin une rotation d'angle θ dû à Q.

Remarque: Ici la rotation et la dilatation sont des fonctions commutatives donc A signifie faire une dilatation et faire une rotation d'angle $\theta - \phi$. ou inversement.

Exercice 3. Rang d'une matrice On a vu en cours que pour toute matrice A, on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$. Vérifier que cette propriété est bien vérifiée pour les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -6 & -13 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Indication : Il n'est pas nécessaire d'appliquer la méthode du pivot si vous pouvez raisonner en utilisant d'autres arguments.

Solution:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & -6 & -13 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \mapsto 2L_2 - L_1 \quad L_3 \mapsto L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & -1 \\ 0 & -6 & -11 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \mapsto L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{rg}(A) = 2$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & 5 & -13 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \mapsto 2L_3 + L_1 \quad L_4 \mapsto 2L_4 - 3L_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 11 & -22 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \mapsto L_3 + 11L_4 \quad L_4 \mapsto 3L_4 + L_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $rg(A) = 2 = rg(A^T)$.

Pour B, on remarque que la matrice est déjà échelonnée donc $rg(B) = 2$. De plus les deux lignes sont linéairement indépendantes (dû au 0 sur la 1ère coordonnée) donc les deux vecteurs colonnes de B^T sont linéairement indépendants et la fonction associée est surjective. Ainsi le rang de B^T est maximale et $rg(B^T) = 2$.

Exercice 4. Rang d'une matrice

1. Soient $f : E \to F$ et $g : G \to E$ deux applications linéaires où on suppose g surjective. Montrer que $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}(f)$.

   Remarque : si on note A et B les matrices respectives des applications f et g, alors, cela équivaut à $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$ si $\mathrm{rg}(B) =$ nombres de lignes de B.

   Solution: On a que $Im(f \circ g) = \{(f \circ g)(x) | x \in E\} = f(\{g(x) | x \in E\}) = f(Im(g))$. Comme g est surjective alors $Im(g) = E$ et donc $f(Im(g)) = f(E) = Im(f)$. Puisque les ensembles sont les même, les dimensions aussi.

2. Soient $f : E \to F$ et $h : F \to G$ deux applications linéaires où on suppose h injective. Montrer que $\mathrm{rg}(h \circ f) = \mathrm{rg}(f)$.

   Remarque : si on note A et C les matrices respectives des applications f et h, alors, cela équivaut à $\mathrm{rg}(CA) = \mathrm{rg}(A)$ si $\mathrm{Ker}(C) = \{0\}$.

   Solution: Remarquons d'abord que $Ker(h \circ f) = \{x \in E | (h \circ f)(x) = 0\} = \{x \in E | f(x) = 0\}$ car h est injective donc $Ker(h \circ f) = Ker(f)$. De plus, on sait que $dim(E) = dim(Ker(h \circ f)) + rg(h \circ f)$ alors $rg(h \circ f) = dim(E) - dim(Ker(h \circ f)) = dim(E) - dim(Ker(f)) = rg(f)$.

3. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est inversible ou nulle si et seulement si pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(MA)$.

   Indication : si A n'est pas inversible, cela veut dire qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $AX = 0$. On pourra donc poser des matrices M de la forme $M = XY^T$.

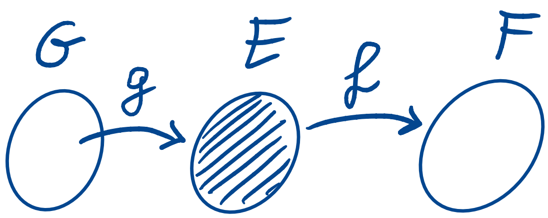
   Solution:
   [$\Longrightarrow$] Supposons que A soit nulle alors pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $AM = 0 = MA$ et les rang sont égaux.
   Sinon supposons que A est inversible alors la fonction associée est bijective. Comme elle est en particulier injective, par le point précédent, pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $rg(AM) = rg(M)$. Comme la fonction est également surjective, par le premier point, $rg(MA) = rg(M)$. Donc $rg(AM) = rg(MA)$.

   [$\Longleftarrow$] Supposons que pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(MA)$ et que A ne soit pas inversible. Alors il existe $X \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \in Ker(A)$. On pose $M = XY^T$ pour un certain $Y \in \mathbb{R}^n$. Ainsi $rg(AM) = rg(AXY^T) = rg(0) = 0$. Donc $rg(XY^T A) = 0$ et $XY^T A = 0$. Comme $X \neq 0$ alors $Y^T A = 0$ pour tout Y(car $Y^T A$ est un vecteur). Si $Y^T = (1, 0, ..., 0)$ alors $Y^T A$ est égale à la première ligne de A. donc cette ligne vaut 0 partout. Maintenant si Y égale le vecteur avec 0 partout sauf en à la $i$ème coordonnée qui vaut 1 alors $Y^T A$ donne la $i$ème ligne de A que est égale à

0 partout. Donc $A = 0$.

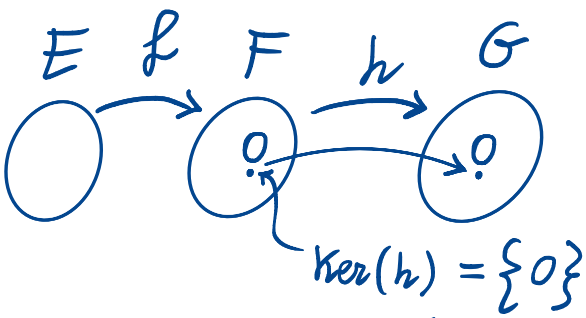
Remarque: De manière générale si $B \neq 0$ et $AB = 0$ alors il existe au moins k et j tel que $B_{k,j} \neq 0$. Ainsi pour tout j, $0 = (AB)ij = \sum_{l=0}^{n} A_{i,l}B_{l,j}$. Donc $A_i, k = 0$ pour tout i et donc A possède au moins une ligne de 0. Si $BA = 0$ alors A possède au moins une colonne de 0.

Ex. 4.1 Rappel: $\mathrm{rg} := \dim(\mathrm{Im})$



Comme g est surjective, on a $\mathrm{Im}(g) = E$

Ex. 4.2



Remarquons d'abord que

$h(f(x)) = 0$

$$\mathrm{Ker}(h \circ f) := \{x \in E \mid (h \circ f)(x) = 0\}$$

$$= \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

$$=: \mathrm{Ker}(f)$$

Il y a un seul élément dans $\mathrm{Ker}(h)$ car h est injective, donc $h(f(x)) = 0$ implique $f(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(h \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

Par le Théor. du rang,

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(h \circ f)) + \mathrm{rg}(h \circ f)$$

Alors,

$$\mathrm{rg}(h \circ f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(h \circ f))$$

$$= \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{rg}(f) \quad \blacksquare$$

Ex. 4.3

M.q. une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est inversible ou nulle ssi $\forall M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on a $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(MA)$.

$\det(A) \neq 0$ ou $\mathrm{rg}(A) = n$ (i.e., plein rang)

O_n

Indication: si A n'est pas inversible $\Rightarrow$ il existe un vecteur $X \in \mathbb{R}^n$ non-nul t.q. $AX = 0$.
Poser $M = XY^T$.

Preuve:

"$\Rightarrow$" Si $A = O_n$ alors $\forall M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on a $AM = O_n = MA$, et donc $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(MA)$.

Si A est inversible alors la fonction associée est bijective. Comme elle est en particulier injective, alors, par l'ex. 4.2, $\forall M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(M)$. Comme elle est également surjective, alors, par l'ex. 4.1, $\mathrm{rg}(MA) = \mathrm{rg}(M)$. Donc $\mathrm{rg}(AM) = \mathrm{rg}(MA)$.

"$\Leftarrow$" Supposons que $\forall M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ on a $rg(AM) = rg(MA)$ et que A n'est pas inversible.

Alors, $\exists X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, t.q. $AX = 0$, i.e., $X \in Ker(A)$. On pose $M = XY^T$ pour un certain $Y \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi, $rg(AM) = rg(AXY^T) = rg(0) = 0$.

Donc $rg(XY^TA) = 0$ et $XY^TA = 0$.

Comme $X \neq 0$, alors $\underbrace{Y^TA}_{\text{vecteur ligne de longueur } n} = 0$, $\forall Y \in \mathbb{R}^n$.

Autrement dit, $A^TY = 0$ (j'ai pris la transposée)

Mais comme Y est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$ qui en général $\notin Ker(A^T)$, cela implique $A^T = 0_n$, c-à-d., $A = 0_n$.

■