UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

# Algèbre I
# Exercices - Série 11

19 novembre 2020
A rendre au plus tard
26 novembre 2020

**Exercice 1. Initiation calculatoire** $(*)$
Calculer les déterminants suivants en essayant de faire le moins de travail possible.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$,
2. $\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}$,
3. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$,
4. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$,
5. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$,
6. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 16 & 24 & 33 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix}$,
7. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$,

*Indice* : Utiliser que le déterminant est linéaire pour chaque colonne. Cela peut aussi permettre de transformer le calcul d'une matrice quelconque en calcul d'une matrice triangulaire !

**Solution:**

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 0.$
2. $\begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$
3. *Laplace//$L_1$*
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = abc + bac = 2abc.$$
4. *Multilinéarité et puis Laplace//$L_1$*
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc \cdot \left( 1 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \right) =$$
$$abc(bc^2 - cb^2 - ac^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2) = abc(c^2(b-a) + c(a^2 - b^2) + ab(b-a)) =$$
$$abc(b-a)(c^2 - c(a+b) + ab) = abc(b-a)(c(c-a) - b(c-a)) = abc(b-a)(c-a)(c-b).$$
5. $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$*, puis multilinéarité, puis* $C_2 \leftarrow C_2 - C_3 + C_1$ *et* $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$*, puis exercice* 4.
$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b+c & c+a \\ 2a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ 2a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ a^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c+a \\ a^2 & b^2 & c^2+a^2 \\ a^3 & b^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

# Série 11.

## Ex.1

1. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$ deux lignes lin. dép. $\rightsquigarrow \det = 0$.

2. $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

3. développement p.r. à $L_1$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = 2abc$$

Règle de Sarrus

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \ - \\ 0 & a & b & 0 & a \\ a & 0 & c & a & 0 \\ b & c & 0 & b & c \end{array} = abc + abc$$

4. $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(b-a)(c-b)(c-a)$$

$C_3' \leftarrow C_3 - C_2$ $\qquad$ $C_2' \leftarrow C_2 - C_1$ $\qquad$ développement p.r. à $L_1$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c-b \\ a^2 & b^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-b \\ b^2-a^2 & c^2-b^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c^2-b^2) - (b^2-a^2)(c-b)$$

$$= (b-a)(c-b)(c+b) - (b-a)(b+a)(c-b)$$

$$= (b-a)(c-b)[c+b-b-a] = (b-a)(c-b)(c-a)$$

5. En faisant les opérations sur les colonnes :

$C_3' \leftarrow C_3 - C_1 + C_2$, $\quad C_2' \leftarrow C_2 - C_3'$, $\quad C_1' \leftarrow C_1 - C_2'$

on obtient :

$$\begin{vmatrix} a & b & 2c \\ a^2 & b^2 & 2c^2 \\ a^3 & b^3 & 2c^3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc(b-a)(c-b)(c-a)$$

$C_2 \leftarrow C_2 - 5C_1$

$C_3 \leftarrow C_3 - 7C_1$

$C_4 \leftarrow C_4 - 9C_1$

6. $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 16 & 24 & 33 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5-5 & 7-7 & 9-9 \\ 3 & 16-15 & 24-21 & 33-27 \\ 5 & 27-25 & 36-35 & 55-45 \\ 7 & 38-35 & 51-49 & 78-63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 10 \\ 7 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix}$$

développement p.r. à $L_1$ :

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{vmatrix}$$

Sarrus :

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 10 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 15 & 3 & 2 \end{matrix} = 15 + \cancel{30} + 24 - 18 - 20 - \cancel{30} =$$

$$= 39 - 38 = 1 .$$

7. $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

6. *$C_2 \leftarrow C_2 - 5C_1, C_3 \leftarrow C_3 - 7C_1, C_4 \leftarrow C_4 - 9C_1$, puis Laplace//$L_1$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - 3C_1, C_3 \leftarrow C_3 - 6C_1$, puis Laplace//$L_1$*

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 16 & 24 & 33 \\ 5 & 27 & 36 & 55 \\ 7 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 16-15 & 24-21 & 33-27 \\ 5 & 27-25 & 36-35 & 55-45 \\ 7 & 38-35 & 51-49 & 78-63 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 10 \\ 7 & 3 & 2 & 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-6 & 10-12 \\ 3 & 2-9 & 15-18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -2 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = (15-14) = 1.$$

7. $$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a & c-a \\ a & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b & c-b \\ a & b-a & c-b & d-b \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b & 0 \\ a & b-a & c-b & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

pas présent dans l'énoncé !

8. (a) Utiliser successivement les operations $C_j \leftarrow C_j - C_{j+1}$, où $1 \leqslant j \leqslant n-1$.
   (b) Utiliser successivement les operations $C_n \leftarrow C_n + k \cdot C_k$, où $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \ddots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

**Exercice 2. Calcul de déterminants par une formule de récurrence** $(**)$
Calculer les déterminants suivants à l'aide d'une formule de récurrence.

1. La suite de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers définie par

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ si } n > 1. \end{cases}$$

   Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $F_n = f_n$, où

$$F_n = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{n\times n}.$$

**Solution:**

en position $\ominus$

Base : On a $F_1 = |\,1\,| = 1$, $F_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

Step : Soit $n > 2$, alors on a (en utilisant deux fois le développement de Laplace sur la première ligne)

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot F_{n-1} - (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$-(-1)$ $F_{n-2}$

$F_{n-1}$

2. Montrer l'égalité $T_n(x) = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, en supposant que $x^2 \neq 1$, où $T_n(x)$ vaut

$$T_n(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{n\times n}.$$

dét

On peut le récrire comme ça car

$1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2)$

**Solution:** Base : Si $n = 1$, on a $|1 + x^2| = \dfrac{1-x^4}{1-x^2}$.

Step : Supposons que pour tout $k \leqslant n-1, n > 1$, on a $T_k(x) = \dfrac{1-x^{2k+2}}{1-x^2}$. Alors,

développement p.r. à $L_1$ :

$$T_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \boxed{x} & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & x & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} =$$

$T_{n-2}(x)$

$$(1+x^2)\cdot T_{n-1}(x) - x^2 T_{n-2}(x) = (1+x^2)\frac{1-x^{2n}}{1-x^2} - x^2\frac{1-x^{2n-2}}{1-x^2} =$$

$$\frac{1-x^{2n}+x^2-x^{2n+2}-x^2+x^{2n}}{1-x^2} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}.$$

$T_n(x) = (1+x^2)\, T_{n-1}(x) - x \cdot x \cdot T_{n-2}(x)$

3. Montrer que $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ si $C_n(x)$ est le déterminant de la matrice compagnon, i.e.

N.B. : matrice carrée de taille $n+1$

$$C_n(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & x & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Base : si $n=0$, $C_0(x) = a_0$ ✓

→ si $n=1$, alors $C_1(x) = \begin{vmatrix} x & a_0 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 x + a_0$ ✓

**Solution:** Base : Si $n = 1$, on a $|a_0| = a_0$.

Step : En développant sur la première ligne, on obtient la somme de $x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^k$ (par hypothèse de récurrence) et de $(-1)^{n+1} a_0 \cdot (-1)^{n-1}$ (le sous-determinant étant une matrice diagonale, dont les coefficients sont -1). Ce qui donne bien $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

sur une matrice de taille $n$

position

taille de la sous-mat.

triang. sup. ?

"naming of the indices"

**Exercice 3. Une somme de déterminants** $(**)$

Les nombres $1, \dots, n^2$ sont mis dans une matrice de taille $n \times n$ de toutes les manières possibles. Calculer la somme $S(n)$ des déterminants de toutes les matrices obtenues.

$(n^2)! = (2^2)! = 24$

Par exemple, $S(1) = 1$ et

$$\begin{aligned} S(2) = {} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \\ & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =? \ 0 \end{aligned}$$

NB : permutation de 2 lignes ⇝ le det change de signe

*Indice* : Grouper les matrices deux par deux !

**Solution:** Notons $E$ l'ensemble de matrices $n \times n$ dont les coefficient sont les nombres de 1 à $n^2$ En suivant l'indice, on va grouper les matrices deux par deux, i.e. on va trouver une bijection $f$ de $E$ dans $E$ telle que $f \circ f = id$ (la matrice $A$ sera donc en groupe avec la matrice $f(A)$. Pour chaque matrice $A$, on considère $f(A)$ la matrice identique à $A$, mais pour laquelle les deux premières colonnes ont été échangé. on remarque que $\det(A) = -\det(f(A))$. Comme $f$ est une bijection de $E$ dans $E$, on a

$$\sum_{A \in E} \det(A) = \sum_{A \in E} \det(f(A)).$$ ✓

On va calculer

$$2S(n) = 2 \sum_{A \in E} \det(A) = \sum_{A \in E} \det(A) + \sum_{A \in E} \det(f(A)) = \sum_{A \in E} (\det(A) + \det(f(A)) = 0.$$

On a donc trouvé $S(n) = 0$.

C'est le résultat utilisé dans l'exo 3.

**Exercice 4.** Montrer le corollaire 4.3 du cours : Soient la matrice $A$ et la matrice $\tilde{A}$, identique à $A$ excepté pour deux colonnes (pas forcement adjacente) qui sont interverties. Montrer que $\det(A) = -\det(\tilde{A})$.
*Indice* : Il suffit de montrer qu'on peut échanger les deux colonnes en $2i+1$ échanges adjacents (expliquez pourquoi !), $i$ étant un nombre à trouver. Faites des essais pour trouver la formule complète. Par exemple, échangez la deuxième et la cinquième colonne d'une matrice $6 \times 6$ en utilisant que des échanges de colonnes adjacentes.

récurrence

**Solution:** On va montrer par induction qu'on peut échanger deux colonnes séparés par $i$ colonnes avec $2i+1$ échange.

Base : Si $i = 0$, alors les colonnes sont adjacentes, et il suffit d'un échange.

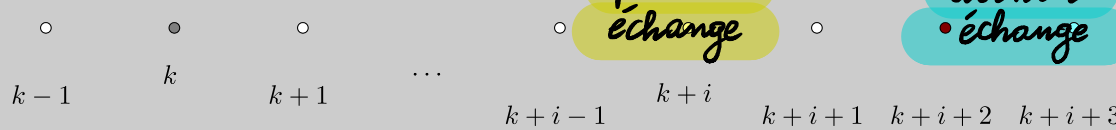
Pas de récurrence : Supposons maintenant qu'on peut échanger deux colonnes séparé es par $i$ colonnes avec $2i+1$ échanges et considérons deux colonnes séparés par $i+1$ colonnes. si la première colonnes est la $k$-ième, on veut donc l'échanger avec la $k+1+(i+1)$-ième colonnes. On fait un premières échange entre la dernière colonne et la $k+1+i$-ième colonne. Maintenant, on sait qu'on peut échanger cette colonne avec la $k$-ième colonnes en $2i+1$ échange par hypothèse de récurrence. Il suffit de ~~de~~ échanger à nouveau les deux colonnes adjacentes pour remettre la $k+1+i$-ième colonne à sa place et on a fini. Il a donc fallu $1+(2i+1)+1 = 2i+3 = 2(i+1)+1$ échanges. Le pas d'induction est donc prouvé !

OK

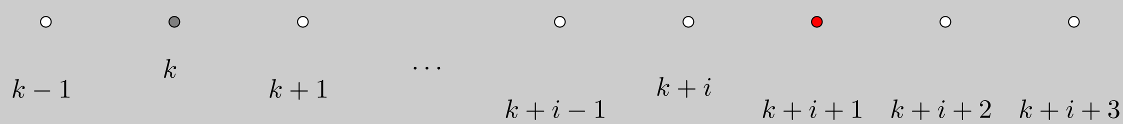
premier échange

dernier échange

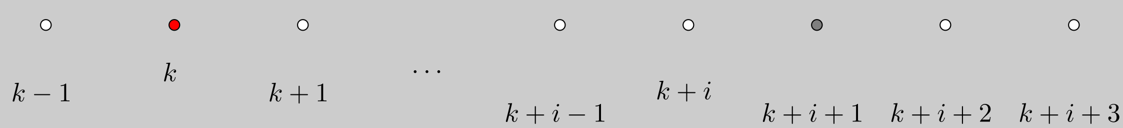
Situation initial :



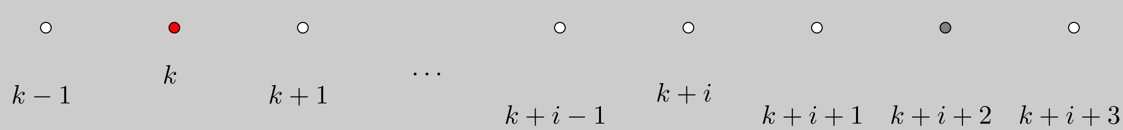

Premier échange :(1)

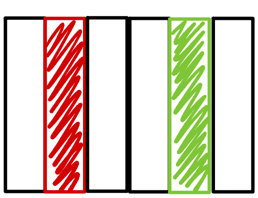



Hypothèse de récurrence :$(1+(2i+1))$




Dernier échange :$(1+(2i+1)+1)$

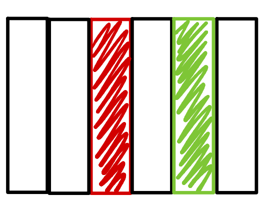


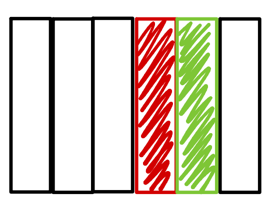
ici $i = 2$

$2i+1 = 5$

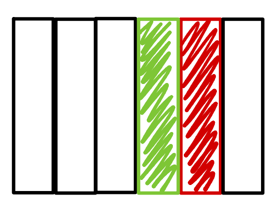
1.



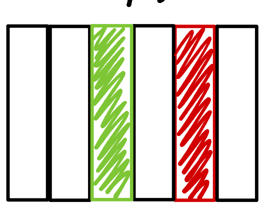
2.



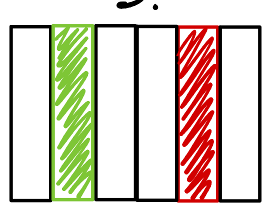
3.



4.



5.



5 échanges !

Donc on peut considérer $i$ comme le nombre de colonnes qui les séparent.