Algèbre I
Exercices – Série 12

4 décembre 2020

Exercice 1. Calculs de déterminants ($*$) Calculer les déterminants suivants

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$,

Solution 1. On calcule :

(a)

déjà fait : Ex. 1.7, Série 11

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(b)

$L_2 - L_1$
$L_3 - L_1$
$L_4 - L_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 \\ 12 & 12 & 12 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(c)

$L_1 - L_5$
$L_2 - L_5$
$L_3 - L_5$
$L_4 - L_5$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

où on a développé par rapport à la première colonne à la deuxième étape.

Exercice 2. Règle de Cramer ($*$) Utiliser la règle de Cramer pour résoudre le système d'équations linéaires

$$2x + 3y - z = 1$$
$$4x + y - 3z = 11$$
$$3x - 2y + 5z = 21$$

Solution 2. On écrit les vecteurs $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}$. Alors

$L_1 - 3L_2$
$L_3 + 2L_2$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \\ 11 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 8 \\ 11 & -1 \end{vmatrix} = -78$$

$L_1 - 3L_2$
$L_3 + 2L_2$

$$\det(b, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 11 & 1 & -3 \\ 21 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -32 & 0 & 8 \\ 11 & 1 & -3 \\ 43 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -32 & 8 \\ 43 & -1 \end{vmatrix} = -312$$

$$\det(a_1, b, a_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 11 & -3 \\ 3 & 21 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -18 & 0 & 8 \\ -39 & 0 & 26 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -18 & 8 \\ -39 & 26 \end{vmatrix} = 13 \times \begin{vmatrix} 18 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 13 \times 12 = 156$$

$L_2 - 11L_1$
$L_3 - 21L_1$

(a) déjà fait : Ex. 1.7, Série 11

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c) = 1(2-1)(3-2)(4-3) = 1$$

(b)

$$C_2' = C_2 - 2C_1$$
$$C_3' = C_3 - 3C_1$$
$$C_4' = C_4 - 4C_1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2-2 & 3-3 & 4-4 \\ 5 & 6-10 & 7-15 & 8-20 \\ 9 & 10-18 & 11-27 & 12-36 \\ 13 & 14-26 & 15-39 & 16-52 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -8 & -12 \\ 9 & -8 & -16 & -24 \\ 13 & -12 & -24 & -36 \end{matrix}$$

dét = 0

(c)

$$\begin{array}{c} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_2 \\ L_4 - L_3 \\ L_5 - L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

dét = 1

$L_1 - 3L_2$
$L_3 + 2L_2$

$L'_2 = L_2 + L_1$

$-110 + 32 = -78$

$$\det(a_1, a_2, b) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 11 \\ 3 & -2 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 0 & -32 \\ 4 & 1 & 11 \\ 11 & 0 & 43 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -32 \\ 11 & 43 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -32 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = -78$$

Donc $x = \frac{-312}{-78} = 4$, $y = \frac{156}{-78} = -2$ et $z = \frac{-78}{-78} = 1$

Exercice 3. Matrice de Vandermonde (∗∗) Montrer que pour

Base :
$n = 2$
$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1$

VOK

$$V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$(n \geq 2)$

$V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$. (∗)

Indice : appliquer successivement les opérations $C_j \leftarrow C_j - \alpha_1 C_{j-1}$ pour j allant de n à 2.

P.S. : Il y a aussi une autre approche très jolie utilisant les propriétés des polynômes.

Je vais faire ceci

Solution 3. On suit l'indice et on raisonne par récurence.

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-3}(\alpha_n - \alpha_1) & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_1) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_n - \alpha_1 & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) & \cdots & \alpha_n^{n-3}(\alpha_n - \alpha_1) & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{vmatrix}$$

Pas de récurrence

On suppose (∗) vrai au rang $n-1$ et on montre qu'elle reste vraie au rang n.

$$= (\alpha_2 - \alpha_1) \cdots (\alpha_n - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-3} & \alpha_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-3} & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} (\alpha_k - \alpha_1) \times V_{n-1}(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$= \prod_{k=2}^{n} (\alpha_k - \alpha_1) \times \prod_{2 < i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

$$= \prod_{1 < i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Où on a utilisé l'hypothèse de récurence pour V_{n-1}.

Autre preuve : on note

$+ \quad - \quad + \quad \dots \quad (-1)^{n-2} \quad (-1)^{n-1}$

$$P(\alpha_1) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

N.B.: c'est la même matrice que V_n

dév. p.r. L_1

En faisant le développement sur la première ligne on sait que $P(\alpha_1)$ est un polynome de degrés $n-1$ en α_1.

$$P(\alpha_1) = (-1)^{n-1} \alpha_1^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

car deux colonnes sont égales

De plus on remarque que pour tout $i > 1$, $\alpha_1 = \alpha_i \Rightarrow P(\alpha_1) = 0$. Donc $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sont les $n-1$ racines de P et ce polynome peut alors s'écrire sous la forme factorisée

$$P(\alpha_1) = C \prod_{i=2}^{n} (\alpha_1 - \alpha_i)$$

avec C le coefficient dominant. C'est à dire

$$C = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} V_{n-1}(\alpha_2, \cdots, \alpha_n).$$

On peut alors faire un raisonnement par récurrence comme précédemment.

But : m.q., sous certaines conditions, on peut travailler avec les blocs comme avec les scalaires.

Exercice 4. Matrices par blocs (**)

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{m_1,k_1}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m_1,k_2}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{m_2,k_1}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{m_2,k_2}(\mathbb{R})$, $E \in \mathcal{M}_{k_1,p_1}(\mathbb{R})$, $F \in \mathcal{M}_{k_1,p_2}(\mathbb{R})$, $G \in \mathcal{M}_{k_2,p_1}(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_{k_2,p_2}(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}.$$

2. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ et en déduire que $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$.
   (b) Soit $\det(A) \neq 0$. Calculer $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que, si $\det(A) \neq 0$, alors $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$. En déduire que si $AC = CA$, alors $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$.
   (d) Calculer $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ en utilisant la question précédente.
   $AC = CA$ car C est une matrice diagonale

Solution 4. 1.On note
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

Faisons la preuve pour le premier bloc. Soit $i \leq m_1$, $j \leq p_1$ alors

$$\begin{aligned} (MN)_{i,j} &= \sum_{t=1}^{k_1+k_2} M_{i,t} N_{t,j} \\ &= \sum_{t=1}^{k_1} M_{i,t} N_{t,j} + \sum_{t=k_1+1}^{k_1+k_2} M_{i,t} N_{t,j} \\ &= \sum_{t=1}^{k_1} A_{i,t} E_{t,j} + \sum_{t=1}^{k_2} B_{i,t} G_{t,j} \\ &= (AE)_{i,j} + (BG)_{ij} \end{aligned}$$

séparer la somme

Les autres blocs se font de la même manière.

2.(a)On utilise la première question

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AI_n + 0 & 0 + 0 \\ CI_n + 0 & 0 + I_n D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & 1 \ddots 1 \end{vmatrix}$$

En faisant le pivot de Gauss avec les 1 de la matrice identité on a que $\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix}$ puis en developpant chacun des 1 de la matrice identité on a $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{vmatrix} = ... = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |A|$. De même $\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{vmatrix} = |D|$. Finalement

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

(b)Si $\det(A) \neq 0$ alors A^{-1} est bien défini. Toujours avec la première question

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AA^{-1}B \\ C & CA^{-1}B + D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

(c)Avec la question précédente,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \overset{\text{avec (a)}}{=} \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

Si de plus $AC = CA$ alors

$$\det(A)\det(D - CA^{-1}B) = \det(AD - ACA^{-1}B) = \det(AD - CAA^{-1}B) == \det(AD - CB)$$

(d)Ici $C = 2I_2$ donc $CA = AC = 2A$. Donc $AC = CA$ car C est une matrice diagonale

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \det(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = -8$$

sous certaines conditions, on peut travailler avec les blocs comme avec les scalaires.

Exercice 5. La formule de la comatrice (∗∗) On définit, pour $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, la comatrice de A, notée $\mathrm{com}(A)$, comme la matrice des cofacteurs, c'est à dire $(\mathrm{com}(A))_{ij} = \mathrm{cof}(a_{ij})$ où $\mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ et A_{ij} est la matrice A où l'on a supprimé la ligne i et la colonne j.

1. Montrer que si $k \neq i$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{cof}(a_{kj}) = 0$.
   Indication : étudier le déterminant de la matrice B obtenue en remplaçant la ligne k de A par la ligne i.
2. Montrer que $A\,\mathrm{com}(A)^T = \det(A)I_n = \mathrm{com}(A)^T A$. En déduire une formule pour l'inverse de A si A est inversible.
3. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Calculer son inverse avec la comatrice.
4. (∗ ∗ ∗) On suppose A inversible. Que vaut $\det(\mathrm{com}(A))$? En déduire $\mathrm{com}(\mathrm{com}(A))$.

Solution 5. 1.On suit l'indication. Le déterminant de cette matrice B est 0 car deux lignes sont identique. Si maintenant on developpe par rapport à la ligne k on a

$$0 = \det B = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & & & & & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1} & & & & & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{dév. p.r. à } L_k}{=} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{ij}(-1)^{k+j}\det(A_{kj})}_{\text{déf. cofacteur}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\mathrm{cof}(a_{kj})$$

On remaque aussi que pour $k = i$

???

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & & & & & a_{in} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{kj}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}(a_{kj})$$

i ? i ?

2.On a alors

$$[A\operatorname{com}(A)^T]_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\operatorname{cof}(a_{kj}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ \det(A) & \text{si } k = i \end{cases}$$

car c'est la transposée

La même chose pour $[\operatorname{com}(A)^T A]_{i,k}$.

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-7 \end{vmatrix} = a - 7$$

DONC inversible pour $a \neq 7$

Calculons les « petits déterminants ».

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 12 \quad , \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 4 \quad , \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad , \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a - 3 \quad , \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1 \quad ,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \quad , \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \quad , \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \quad , \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

La comatrice et l'inverse sont alors

$$\operatorname{com}(A) = \begin{pmatrix} 2a-12 & 4-a & 1 \\ 3-a & a-1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{com}(A)^T = \frac{1}{a-7}\begin{pmatrix} 2a-12 & 3-a & 2 \\ 4-a & a-1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A)A^{-1} = \operatorname{com}(A)^T$

4.On a que $\det(\det(A)I_n) = \det(A)^n\det(I_n) = \det(A)^n$ et $\det(A\operatorname{com}(A)^T) = \det(A)\det(\operatorname{com}(A)^T)$ Donc

(*) $\det(\operatorname{com}(A)) = \det(A)^{n-1}$. Pour finir

$$\operatorname{com}(\operatorname{com}(A)) = \det(\operatorname{com}(A))(\operatorname{com}(A))^{-1} \overset{(*)}{=} \det(A)^{n-1}\frac{1}{\det A}A = \det(A)^{n-2}A$$

déf comatrice

$$\begin{pmatrix} \det(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(A) \end{pmatrix}$$