Algèbre I
Corrigé Série 1

21 septembre 2020

Exercice 1. (Espaces vectoriels des fonctions)

1. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit $f, g \in E$, alors on peut définir la somme $f + g$ ce qui est la fonction qui envoie x à $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Similairement, soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la multiplication $\lambda \in \mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$. Montrez que E muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites de scalaires $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n \in \mathbb{R}$, qui peut aussi être vu comme l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Cet ensemble, muni des lois

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} := (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}},$$
$$\alpha\cdot(u_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\alpha\cdot u_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R},$$

forme-t-il un espace vectoriel ?

vérifier tous les axiomes :

Sol.: *On vérifie toutes les points de la définitions d'espace vectoriel pour l'espace des fonctions.*

— *(A1,associativité) : Soit $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors*

$$[(f + g) + h](x) = (f + g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = f(x) + (g + h)(x) = [f + (g + h)](x)$$

— *(A2, commutativité) : Soit $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (g + f)(x)$$

— *(A3, élément neutre). On définie la fonction $\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\mathbf{0}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*

$$(f + \mathbf{0})(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

— *(A4, élémente opposé). Pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $[-f](x) = -f(x)$ satisfait*

$$[f + (-f)](x) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}(x)$$

— *(B1) Pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a*

$$[\lambda \cdot (\mu \cdot f)](x) = \lambda\mu f(x) = [(\lambda\mu) \cdot f](x).$$

— *(B2,distributivité) Pour tout $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a*

$$[(\lambda + \mu) \cdot f](x) = \lambda f(x) + \mu f(x) = [\lambda \cdot f + \mu \cdot f](x).$$

— *(B3,distributivité) Pour tous $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on a*

$$[\lambda \cdot (f + g)](x) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = [\lambda \cdot f + \lambda \cdot g](x).$$

— *(B4,élément neutre) Pour tous $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,*

$$[1 \cdot f](x) = 1 \times f(x) = f(x).$$

(ici $1 \in \mathbb{R}$).

On fait de même pour les suites.

— *(A1,associativité) : Soit $u, v, w \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ alors*

$$[(u + v) + w]_n = (u + v)_n + w_n = u_n + v_n + w_n = u_n + (v + w)_n = [u + (v + w)]_n$$

— *(A2, commutativité) : Soit $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ alors*

$$(u + v)_n = u_n + v_n = (u + v)_n$$

— *(A3, élément neutre). On définie la fonction* $\mathbf{0} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *par* $\mathbf{0}_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors pour tout* $u \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

$$(u + \mathbf{0})_n = u_n + 0 = u_n$$

— *(A4, élémente opposé). Pour tout* $u \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, *la fonction* $-u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par* $[-u]_n = -u_n$ *satisfait*

$$[u + (-u)]_n = u_n - u_n = 0 = \mathbf{0}_n$$

— *(B1) Pour tout* $u \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *on a*

$$[\lambda \cdot (\mu \cdot u)]_n = \lambda \mu u_n = [(\lambda\mu) \cdot u]_n.$$

— *(B2,distributivité) Pour tout* $u \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *on a*

$$[(\lambda + \mu) \cdot u]_n = \lambda u_n + \mu u_n = [\lambda \cdot u + \mu \cdot u]_n.$$

— *(B3,distributivité) Pour tous* $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *on a*

$$[\lambda \cdot (u + v)]_n = \lambda u_n + \lambda v_n = [\lambda \cdot u + \lambda \cdot v]_n.$$

— *(B4,élément neutre) Pour tous* $u \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$,

$$[1 \cdot u]_n = 1 \times u_n = u_n.$$

(ici $1 \in \mathbb{R}$*).*

Exercice 2. (Est ce un espace vectoriel ?) Pour chacun des espaces suivants, dire si c'est un espace vectoriel ou non sur $\mathbb{R}$. Si oui, prouver la (les) propriété(s) entre parenthèse demandée(s), si non, expliquer quel axiome est mis en défaut. Attention, certaines questions n'admettent pas pour réponse juste oui ou non.

Demander aux étudiants

1. l'espace $E = \{0\}$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (A.3)
2. l'espace $E = [0, 1]$ avec les lois usuelles $\rightsquigarrow$ (B.4)
3. l'espace $E = \mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (B.2)
4. l'espace $E = \mathbb{R}^2$ avec l'addition $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ et la multiplication $\lambda.(x, y) = (\lambda x, 0)$. $\rightsquigarrow$ (A.1, B.1)
5. l'espace $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(a) = b\}$ avec les lois usuelles, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont fixés. $\rightsquigarrow$ (toutes les propriétés)
6. l'espace $E = \mathbb{R}[x]$ des polynômes $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sans borne sur leur degré, avec les lois usuelles. $\rightsquigarrow$ (A2-B3)

Sol.: *(Est ce un espace vectoriel ?) On va explicité si c'est un espace vectoriel ou non sur* $\mathbb{R}$.

1. *OUI l'espace* $E = \{0\}$ *avec les lois usuelles est bien un espace vectoriel. Ici le plus simple est de montrer que c'est un sous espace vectoriel de* $\mathbb{R}$ *mais on ne demande que de vérifier la condition (A.3) :* $0 \in \{E\}$ *et puisque* 0 *est l'unique élément de* E *on a bien* $0 + 0 = 0$.
2. *NON l'espace* $E = [0, 1]$ *avec les lois usuelles n'est pas un espace vectoriel. En effet les lois* $+, \cdot$ *ne sont pas définit sur* $[0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, *et* $\mathbb{R} \times [0, 1] \to [0, 1]$ *car* $1 + 1 = 2 \notin [0, 1]$ *ou* $2 \cdot 1 = 2 \notin [0, 1]$.
3. *NON l'espace* $E = \mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ *avec les lois usuelles n'est pas un espace vectoriel. La lois* $\cdot$ *n'est pas définit sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *car* $\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.

car les scalaires sont pris du corps $\mathbb{R}$

4. *NON l'espace* $E = \mathbb{R}^2$ *avec l'addition* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ *et la multiplication* $\lambda.(x, y) = (\lambda x, 0)$ *n'est pas un espace vectoriel. Il ne s'attisfait pas l'élément neutre* $1 \cdot (x, y) = (x, 0) \neq (x, y)$ *si* $y \neq 0$.
5. *Pour* $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(a) = b\}$ *ça dépend de* b. *Si* $b \neq 0$ *ce n'est pas un espace vectoriel car il n'y a pas d'élément neutre* $\mathbf{0} \in E$ *(on peut aussi dire que* $f, g \in E$, *alors* $(f + g)(a) = 2b \neq b$ *et donc que* $(f + g) \notin E$*). Si* $b = 0$ *c'est effectivement un espace vectoriel. Le plus simple est de montrer que c'est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. *Soit* $f, g \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *alors*

   i.e., non-vide et stable par addition & multiplication

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) = 0 \quad \textit{et} \quad [\lambda \cdot f](a) = \lambda f(a) = 0$$

   donc on a bien $f + g \in E$ *et* $\lambda \cdot f \in E$.

est-ce qu'ils ont déjà vu la caractérisation des sous-espaces vectoriels ?

6. *Oui l'espace $E = \mathbb{R}[x]$ des polynômes $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sans borne sur leur degré, avec les lois usuelles est bien un espace vectoriel. Même chose plutôt que vérifier toutes les conditions le mieux est de prouver que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ici on demandait cependant de ne montrer que (A2) : Soit $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $q = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ deux polynomes.*

$$(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m} b_k x^k = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k + \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = (q+p)(x)$$

Et (B3) : Ici on peut supposer $n = m$ quitte à ajouter des termes avec a_k ou $b_k = 0$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$[\lambda(p+q)](x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda(a_k + b_k)x^k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \lambda \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \lambda p(x) + \lambda q(x)$$

Exercice 3. (Qui est un sous-espace vectoriel ?) Pour chacun des espaces suivants, dire si F est un sous-espace vectoriel de E ou non, et le prouver. Tous les espaces vectoriels E sont sur $\mathbb{R}$.

1. $E = M_{2,2}(\mathbb{R})$, $F = \left\{ A \in E \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$, où $u, v \in \mathbb{R}^3$ sont fixés.
3. $E = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi)\}$, $F = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi) = a\}$ où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.
4. $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et
   (a) $F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid |f| \le M\}$, où $M \in \mathbb{R}$ est fixé,
   (b) F_2 l'ensemble des fonctions bornées de E.
5. $E = \mathbb{R}_4[x]$, F l'ensemble des fonctions impaire de E.
6. E un espace vectoriel (quelconque), $F = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$, où U, V sont deux sous-espaces vectoriels (quelconques) de E fixés.

Sol.: *(Qui est un sous-espace vectoriel ?) Pour chacun des espaces suivants, dire si F est un sous-espace vectoriel de E ou non, et le prouver. Tous les espaces vectoriels E sont sur $\mathbb{R}$.*

1. *NON $F = \left\{ A \in E \mid A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel de $E = M_{2,2}(\mathbb{R})$. Il ne contient pas l'élément neutre $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*
2. *OUI $F = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ est bien un sous espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$. Non vide et stable par addition : Soit $f_1, f_2 \in F$ alors on écrit $f_1 = \lambda_1 u + \mu_1 v$ et $f_2 = \lambda_2 u + \mu_2 v$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ et on a*
$$f_1 + f_2 = \lambda_1 u + \mu_1 v + \lambda_2 u + \mu_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2)u + (\mu_1 + \mu_2)v \in F$$
   et stable par multiplication pour tout $c \in \mathbb{R}$,
$$cf_1 = c(\lambda_1 u + \mu_1 v) = (c\lambda_1)u + (c\mu_1)v) \in F.$$

→ Espace vectoriel des fonctions periodiques sur $[0, 2\pi]$

3. *Pour $E = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi)\}$ et $F = \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(2\pi) = a\}$, F est un sous espace vectoriel si et seulement si $a = 0$. En effet si $a \neq 0$ alors l'élément neutre $\mathbf{0} \notin F$, et donc F n'est pas un espace vectoriel. Maintenant si $a = 0$ on a bien $\mathbf{0} \in F$ stable par addition : Soit $f_1, f_2 \in F$ alors $f_1(0) = f_1(2\pi) = 0$ et $f_2(0) = f_2(2\pi) = 0$ et donc*
$$f_1(0) + f_2(0) = f_1(2\pi) + f_2(2\pi) = 0 + 0 = 0$$
   soit $(f_1 + f_2) \in F$ et stable par multiplication pour tout $c \in \mathbb{R}$,
$$cf_1(0) = cf_1(2\pi) = 0$$
   soit $cf_1 \in F$
4. *pour $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,*

(a) L'ensemble $F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid |f| \leq M\}$, où $M > 0$ est fixé, n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet la fonction $f(x) = M$ pour tout x appartient bien à F_1 mais $2f(x) = 2M > M$ et donc $[2f] \notin F_1$. Par contre si $M = 0$ alors $F_1 = \{\mathbf{0}\}$ qui est bien un espace vectoriel. Enfin si $M < 0$ alors $F_1 = \emptyset$ n'est pas un espace vectoriel.

(b) Oui F_2 l'ensemble des fonctions bornées de E est bien un espace vectoriel. On a bien que $\mathbf{0} \in F_2$. Stable par addition et multiplication : Soit $f, g \in F_2$ et λ, μ alors il existe $N, M > 0$ tel que $|f(x)| \leq N$ et $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On alors

$$|(\lambda f + \mu g)(x)| = |(\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq |(\lambda||f(x)| + |\mu||g(x)| \leq |\lambda|N + \mu M$$

et donc que $(\lambda f + \mu g)$ est bien borné.

5. F l'ensemble des fonctions impaire de $E = \mathbb{R}_4[x]$ est bien un sous espace vectoriel. En effet $\mathbf{0} \in F$ et Soit $p, q \in F$ et λ, μ alors $p(-x) = -p(x)$ et $q(-x) = -q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On alors

$$(\lambda p + \mu q)(-x) = \lambda p(x) + \mu q(-x) = -\lambda p(x) - \mu q(x) = -(\lambda p + \mu q)(x)$$

et donc que $(\lambda p + \mu q) \in F$.

6. Pour E un espace vectoriel (quelconque), $F = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$, où U, V sont deux sous-espaces vectoriels (quelconques) de E fixés est bien un sous espace vectoriel. En effet $0 \in U$ et $0 \in V$ et donc $0 = 0 + 0 \in F$. Ensuite stable par addition et multiplication : Soit $f_1, f_2 \in F$ alors on écrit $f_1 = u_1 + v_2$ et $f_2 = u_2 + v_2$ avec $u_1, u_2 \in U$ et , $v_1, v_2 \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. on a

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = \lambda u_1 + \lambda v_1 + \mu u_2 + \mu v_2 = (\lambda u_1 + \mu u_2) + (\lambda v_1 + \mu v_2)$$

le premier terme de la somme appartient à U car U est un sous espace vectoriel et $u_1, u_2 \in U$. De même le deuxième terme de la somme appartient à V car c'est un sous espace vectoriel et $v_1, v_2 \in V$. Donc $\lambda f_1 + \mu f_2 \in F$

Ex. 3.4(a) :