UNE FAÇON POSSIBLE DE RAISONNER :
Par exemple, première chose à vérifier : élément neutre ?
Si NON → c'est pas un S.E.V.
Si OUI → on continue en vérifiant la Prop 1.4 :
(b,c) : $\forall x, y \in F$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\lambda x + \mu y \in F$ (stabilité des lois)

Série 2, Espaces Vectoriels

UNE AUTRE FAÇON : TROUVER DES CONTRE-EXEMPLES !

23 septembre 2020

Exercice 1. (Est ce un sous-espace vectoriel ?).

(1) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

(a) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \text{ et } x \geq 0\}$

(b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 5y = 1\}$

(c) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.

Solution:

(a) Non. En effet, pour l'élément (x, y) dans E, son inverse $(-x, -y)$ n'appartient pas à E (car -x est négatif). Autre façon de le prouver, si on choisit λ un réel négatif alors la multiplication par ce scalaire n'est pas stable i.e. $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ n'appartient pas à E (car λx est négatif). $\lambda < 0$

(b) Non. En effet, le neutre $(0, 0)$ n'est pas dans l'ensemble E.

(c) Non. En effet, $(1, 0)$ et $(0, 1) \in E$, mais $(1, 1) = (1, 0) + (0, 1)$ n'est pas dans l'ensemble. Ainsi l'addition n'est pas stable.

(2) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

(a) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$

(b) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$

(c) $E = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(d) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 - x^3 = 0\}$

(e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y \text{ et } 3y - 2z = 0\}$.

Solution:

(a) Non. En effet, le neutre $(0, 0, 0)$ n'est pas dans l'ensemble.

(b) Oui. Remarquons d'abord que l'ensemble n'est pas vide puisque $(0, 0, 0)$ appartient à E. Montrons ensuite que les lois sont stables : soient $(x, 0, z)$ et $(x', 0, z') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(x, 0, z) + (x', 0, z') = (x + x', 0 + 0, z + z') \in E$$

$$\lambda \cdot (x, 0, z) = (\lambda x, \lambda 0, \lambda z) = (\lambda x, 0, \lambda z) \in E.$$

Par la proposition du cours, E est bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(c) Oui. Remarquons d'abord que l'ensemble n'est pas vide puisque $(0, 0, 0)$ appartient à E. Montrons ensuite que les lois sont stables : soient $(x, 2x, 3x)$ et $(x', 2x', 3x') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(x, 2x, 3x) + (x', 2x', 3x') = (x + x', 2x + 2x', 3x + 3x') = (x + x', 2(x + x'), 3(x + x')) \in E$$

$$\lambda \cdot (x, 2x, 3x) = (\lambda x, \lambda 2x, \lambda 3x) = (\lambda x, 2(\lambda x), 3(\lambda x)) \in E.$$

C'est une droite de $\mathbb{R}^3$

Par la proposition du cours, E est bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$y^2 - x^3 = 0$

(d) Non. En effet, les éléments $(1,1,0)$ et $(1,-1,0)$ sont dans l'ensemble, mais leur somme $(2,0,0)$ ne l'est pas. Donc l'addition n'est pas stable.

(e) Oui. Remarquons d'abord que l'ensemble n'est pas vide puisque $(0,0,0)$ appartient à E.
Montrons ensuite que les lois sont stables : soient (x,y,z) et $(x',y',z') \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ce qui implique que $x = y$, $x' = y'$, $3y - 2z = 0$ et que $3y' - 2z' = 0$) alors

$$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$$

Or $x = y$ et $x' = y'$ implique que $x + x' = y + y'$ et $3y - 2z = 0$ et $3y' - 2z' = 0$ implique que $3(y+y') - 2(z+z') = 0$. Donc $(x+x', y+y', z+z') \in E$.

$$\lambda \cdot (x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

Or $x = y$ implique que $\lambda x = \lambda y$ et $3y - 2z = 0$ implique que $0 = \lambda(3y - 2z) = 3\lambda y - 2\lambda z$. Donc $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in E$.
Par la proposition du cours, E est bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(3) Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[x]$ (l'ensemble des polynômes) sont-ils des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

polynômes ? $p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$

(a) $E = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 2\}$
(b) $E = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \geq 2\}$
(c) $E = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(x^2) = p'(x) + x^4 p(x)\}$.

polynômes de degré au minimum 2

Solution:

le polynôme nulle

(a) Oui. Remarquons d'abord que l'ensemble n'est pas vide puisque 0 (qui peut-être vu comme un polynôme) appartient à E.

Montrons ensuite que les lois sont stables : soient $p(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i x^i$ et $q(x) = \sum_{i=0}^{2} b_i x^i \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (on peut prendre deux polynômes de degré 2 car au pire si on prend un polynôme de degré plus petit, on lui rajoute des termes qui valent 0) alors

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i x^i + \sum_{i=0}^{2} b_i x^i = \sum_{i=0}^{2} (a_i + b_i) x^i \in E$$

$$\lambda \cdot p(x) = \sum_{i=0}^{2} \lambda a_i x^i$$

Dans les deux cas, les opérations n'augmente pas le degré des polynômes donc les lois sont stables et E est bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(b) Non. En effet, les polynômes x^2 et $1 - x^2$ sont dans l'ensemble, mais leur somme, 1, ne l'est pas. Donc l'addition n'est pas stable.

(c) Oui. Remarquons d'abord que l'ensemble n'est pas vide puisque 0 (qui peut-être vu comme un polynôme) appartient à E.
Montrons ensuite que les lois sont stables : soient $p(x)$ et $q(x)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(p+q)(x^2) = p(x^2) + q(x^2) = p'(x) + x^4 p(x) + q'(x) + x^4 q(x) = (p+q)'(x) + x^4 (p+q)(x)$$

$$(\lambda \cdot p)(x^2) = \lambda p(x^2) = \lambda(p'(x) + x^4 p(x)) = \lambda p'(x) + x^4 \lambda p(x) = (\lambda p)'(x) + x^4 (\lambda p)(x)$$

car la dérivée est linéaire. Donc l'addition et la multiplication par un scalaire sont stables et E est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(4) Soit n un entier, $n \geq 2$. On note $M_{n,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ (tableau $n \times n$) avec les lois additions et de multiplication terme à terme (comme pour $M_{2,2}(\mathbb{R})$). Les parties suivantes de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ sont-elles des sous-espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$?

(a) $E = \{M \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid$ la deuxième colonne de M est nulle$\}$,

(b) $E = \{M \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid$ deux colonnes de M sont identiques$\}$.

↳ n'importe lesquelles

Solution:

(a) Oui. Remarquons d'abord que E n'est pas vide car il contient la matrice composée de 0 . la matrice nulle

Montrons maintenant que les lois sont stables : soient $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

Puisque l'addition entre M et N se fait termes à termes alors les éléments de la 2e colonne de M vont s'ajouter aux éléments de la 2e colonne de N. Comme tous ces éléments sont nuls alors leur somme aussi sera nulle et $M + N$ aura sa 2e colonne nulle. Donc $M + N \in E$.

De la même manière $\lambda \cdot M$ est la matrice qui contient chaque élément de M multiplié avec λ. Comme un nombre multiplié à 0 donne 0, les termes de la 2e colonne de $\lambda \cdot M$ seront tous nuls et donc $\lambda \cdot M \in E$.

Ainsi E est bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(b) Oui pour $n = 2$. En effet E n'est pas vide car il contient la matrice composée de 0. De plus, les lois sont stables : soient $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

Puisque l'addition entre M et N se fait termes à termes et que les deux colonnes de M sont identiques et que les deux colonnes de N aussi alors leur somme donnera deux colonnes identiques. Donc $M + N \in E$.

De la même manière $\lambda \cdot M$ est la matrice qui contient chaque élément de M multiplié avec λ. Comme tous les éléments sont multipliés par le même scalaire (ici λ) alors les deux colonnes restent identiques et donc $\lambda \cdot M \in E$.

Ainsi E est bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Non. Pour $n > 2$ par contre, ce n'est plus le cas. En effet, l'addition n'est pas stable si on prend deux matrices M et N qui n'ont pas les même colonnes identiques.

(5) Les sous-ensembles suivants de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$,

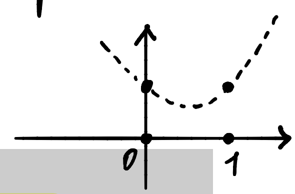
(b) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$.

(c) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)\}$.

(d) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)^2\}$.

(e) $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -xf(x)\}$.

p.ex.



Solution:

(a) Oui. Remarquons d'abord que E n'est pas vide car il contient la fonction constante 0.

Maintenant, montrons que les lois sont stables : soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(f + g)(0) = f(0) + g(0) = f(1) + g(1) = (f + g)(1) \Longrightarrow f + g \in E$$

$$(\lambda \cdot f)(1) = \lambda f(1) = \lambda \cdot f(0) = (\lambda \cdot f)(0) \Longrightarrow \lambda \cdot f \in E.$$

Ainsi E est bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(b) Non. En effet, le neutre pour l'addition (ici la fonction constante 0) n'appartient pas à l'ensemble. Autre façon de le prouver est de remarquer que l'addition n'est pas stable dans E : soient f et $g \in E$ alors $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2 \neq 1$.

(c) Oui. Remarquons d'abord que E n'est pas vide car il contient la fonction constante 0. Montrons maintenant que les lois sont stables : soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

linéairité de la dérivée

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \Longrightarrow f + g \in E$$

$$(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda f'(x) = \lambda f(x) = (\lambda \cdot f)(x) \Longrightarrow \lambda \cdot f \in E.$$

Ainsi E est bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(d) Non. On vérifie facilement que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ est dans l'ensemble, mais que $(2 \cdot f)(x) = 2f(x) = \dfrac{2}{x}$ ne l'est pas donc la multiplication par un scalaire n'est pas stable.

(e) Oui. Remarquons d'abord que E n'est pas vide car il contient la fonction constante 0. Maintenant, montrons que les lois sont stables : soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = -xf(x) - xg(x) = -x\,(f(x) + g(x)) = -x(f+g)(x) \Longrightarrow f + g \in E$$

$$(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda f'(x) = \lambda(-x)f(x) = -x(\lambda \cdot f)(x) \Longrightarrow \lambda \cdot f \in E.$$

L'ensemble E est donc bien un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie

$$\forall u \in U, \forall v \in U, \quad u + v \in U,$$
$$\forall u \in U, \quad -u \in U$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Solution:

Un exemple possible est $\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \| x, y \in \mathbb{Z}\}$ avec les lois usuelles. En effet, il satisfait les deux conditions (on dit que c'est un *sous-groupe*), mais ce n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ puisque la multiplication par un scalaire n'est pas stable :

$$(1,1) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mais } \sqrt{2} \cdot (1,1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin \mathbb{Z}^2.$$

2. Donner un exemple de sous-ensemble non vide U de $\mathbb{R}^2$ qui vérifie :

$$\forall u \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in U$$

mais qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Solution:

Un exemple possible est $E = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ muni des lois usuelles. Il satisfait la condition mais ce n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ car l'addition n'est pas stable :

$$(1,0), (0,1) \in E \text{ mais leur somme } (1,1) \notin E.$$

Exercice 3.

1. Montrer que l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (voir Feuille de Serie 1).

2. On note F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \geq a$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution:

1. Traduisons la phrase mathématiquement. Nous voulons montrer que l'ensemble

$$V = \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \| \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, a_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel. On remarque d'abord que l'ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient ~~l'identité, i~~.e. la suite constante en 0.
La multiplication par un scalaire est stable. En effet, prenons $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer $\lambda \cdot (x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\lambda x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V$. On sait qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $x_n = 0$. Posons $N = N'$. Soit $n \geq N$. Alors $n \geq N'$ implique $\lambda x_n = \lambda 0 = 0$.
L'addition est aussi stable. On prend $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V$, et on veut montrer

$$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} + (\overset{y_k}{\cancel{x_k}})_{k\in\mathbb{N}} = (x_k + y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V.$$

On sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $x_n = 0$ et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $y_n = 0$. On pose $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$. Alors $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ impliquent $x_n + y_n = 0 + 0 = 0$.

2. Traduisons une nouvelle fois la phrase mathématiquement. Nous voulons montrer que l'ensemble

même chose, mais avec des fonctions

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \| \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \geq a, f(x) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel. On remarque d'abord que l'ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient ~~l'identité, i~~.e. la fonction constante en 0.
La multiplication par un scalaire est stable. En effet, prenons $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer $\lambda \cdot f \in F$. On sait qu'il existe $a' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq a'$, $f(x) = 0$. Posons $a = a'$. Soit $x \geq a$. Alors $x \geq a'$ implique

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0.$$

L'addition est aussi stable. On prend $f_1, f_2 \in F$, et on veut montrer $f_1 + f_2 \in F$. On sait qu'il existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq a_1$, $f_1(x) = 0$ et $a_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geq a_2$, $f_2(x) = 0$. On pose $a = \max(a_1, a_2)$. Soit $x \geq a$. Alors $x \geq a_1$ et $x \geq a_2$ impliquent

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0 + 0 = 0.$$

Exercice 4. Soit E un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$. Montrer que'on a soit $E = \{0\}$, soit $E = \mathbb{R}$.

$E \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

Solution:

DISJONCTION NON EXCLUSIVE : "OU"

On peut d'abord vérifier via un tableau de vérité que $A \vee B$ est équivalent à $\neg A \Rightarrow B$. En utilisant cela, on montre la proposition en prouvant que

"NÉGATION DE" OU "NON"

si E n'est pas égal à $\{0\}$, alors E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Supposons que E n'est pas égal à $\{0\}$, alors il existe un élément $x_0 \in \mathbb{R}^*$ dans E. Comme E un espace vectoriel et x_0 est non-nul, on sait que

$$1 = x_0^{-1} \cdot x_0 \in E.$$

$\exists$ él. inverse de x_0 de la multiplication et $\exists$ él. neutre de la multiplication

On regarde x_0 comme un élément de E et x_0^{-1} comme un scalaire et $\cdot$ comme la multiplication par un scalaire. Donc 1 appartient à E.

$\mathbb{R} \subset E$ {
Montrons maintenant que $\mathbb{R} \subset E$, i.e. la phrase $\forall x \in \mathbb{R}, x \in E$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait déjà $1 \in E$, ce qui implique que $x \cdot 1 = x$ est dans E. (car E est un E.V.)

On a donc montré $\mathbb{R} \subset E$, et $E \subset \mathbb{R}$ est vrai par definition. Cela veut dire $\mathbb{R} = E$ (c'est ce qu'on appelle une preuve par *double inclusion*). Donc si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$ et que E n'est pas *trivial*, dans le sens où $E \neq \{0\}$, alors $E = \mathbb{R}$.

A : "E est égal à {0}"

B : "E est égal à ℝ"

A	¬A
vrai	faux
faux	vrai

A	B	A ∨ B
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	vrai
faux	vrai	vrai
faux	faux	faux

C	D	C ⇒ D
vrai	vrai	vrai
vrai	faux	faux
faux	vrai	vrai
faux	faux	vrai

MÊME TABLEAU

A	¬A	B	¬A ⇒ B
vrai	faux	vrai	vrai
vrai	faux	faux	vrai
faux	vrai	vrai	vrai
faux	vrai	faux	faux