05/10/2020

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Algèbre I
Corrigé – Série 3

1. **Bases de $\mathbb{R}^2$ ($\star$)**
Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1), \quad u = (-2,3), \quad v = (4,-6)$$

(a) Montrer que $\{u, v\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.
(b) Montrer que $\{e_1, v\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(c) Montrer qu'il existe une infinité de bases possibles de $\mathbb{R}^2$.

Solution : $\rightarrow$ On montre qu'elle liée, donc elle n'est pas une base.

(a) On a $v = -2u$. Si un vecteur w peut s'écrire sous la forme $w = \lambda u + \mu v$, alors on a $w = (\lambda - 2\mu)u$, donc, w est u doivent être collinéaires. Quand-même les vecteurs e_1 et u ne sont pas collinéaires, donc e_1 ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire de u et v, donc, $\{u, v\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

(b) Soit $w = (a, b)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ quelconque. On a $w = \left(a + \frac{2}{3}b\right)e_1 - \frac{b}{6}v$.

M.q. $\{e_1, v\}$ est libre et génératrice :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 v = (\lambda_1 + 4\lambda_2, -6\lambda_2) = (a,b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = a \\ -6\lambda_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a + \frac{2}{3}b \\ \lambda_2 = -\frac{b}{6} \end{cases}$$

(c) Par exemple, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\{e_1 + \lambda e_2, e_2\}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^2$.

2. **Familles libres et génératrices ($\star\star$)**
Décider si les vecteurs donnés ci-dessous forment une famille libre ou génératrice.

(a) $(1,2,2),\ (-2,0,2),\ (-2,2,-1)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$,
(b) $(0,0,2,0),\ (2,0,-2,0),\ (-2,2,-1,0)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$,
(c) $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ 1+x+x^2+x^3$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$,
(d) $2x - x^3 + 1,\ 5x^2 + x^3,\ x^2 - 3x^3$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$.

Solution :

(a) • La famille $\{(1,2,2), (-2,0,2), (-2,2,-1)\}$ est libre.
En effet, si $\lambda \cdot (1,2,2) + \mu \cdot (-2,0,2) + \eta \cdot (-2,2,-1) = 0$, alors on a :

$$\begin{cases} \lambda - 2\mu - 2\eta = 0 \\ 2\lambda + 2\eta = 0 \\ 2\lambda + 2\mu - \eta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\lambda - 2\mu = 0 \\ \lambda + \eta = 0 \\ 3\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \eta = 0 \end{cases}.$$

Théorème 1.21 • Si V est un espace vectoriel de dimension n, alors toute famille libre de V qui compte n éléments est une base. L'espace $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, donc la famille $\{(1,2,2), (-2,0,2), (-2,2,-1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}$. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$

(b) • La famille $\{(0,0,2,0), (2,0,-2,0), (-2,2,-1,0)\}$ est libre.
En effet, si $\lambda \cdot (0,0,2,0) + \mu \cdot (2,0,-2,0) + \eta \cdot (-2,2,-1,0) = 0$, alors on a :

$$\begin{cases} 2\mu - 2\eta = 0 \\ 2\eta = 0 \\ 2\lambda - 2\mu - \eta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \eta = 0 \end{cases}.$$

• On montre qu'elle n'est pas génératrice avec un contre-exemple.
Évidemment, le vecteur $(0,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$ ne peut pas s'ecrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\{(0,0,2,0), (2,0,-2,0), (-2,2,-1,0)\}$, donc cette famille n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$. $\longrightarrow$ donc pas base.

(c) La famille $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ dans $\mathbb{R}_3[x]$ est libre. En effet, si l'égalité $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot (1+x) + \eta \cdot (1+x+x^2) + \nu \cdot (1+x+x^2+x^3) = 0$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors on a que

$$\begin{cases} \lambda+\mu+\eta+\nu=0 \\ \mu+\eta+\nu=0 \\ \eta+\nu=0 \\ \nu=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \\ \eta=0 \\ \nu=0 \end{cases}.$$

✓

Théorème 1.21 • De plus, $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ forme une base de $\mathbb{R}_3[x]$. Pour le montrer, on peut, par exemple, noter que la dimension de $\mathbb{R}_3[x]$ est 4, donc une famille libre à 4 éléments forme une base de $\mathbb{R}_3[x]$. On peut aussi voir que les éléments de la base $\{1, x, x^2, x^3\}$ dans $\mathbb{R}_3[x]$ peuvent s'écrire dans une manière très simple comme les combinaisons linéaires de vecteurs de la famille considérée : $x^3 = (1+x+x^2+x^3) - (1+x+x^2)$, $x^2 = (1+x+x^2) - (1+x)$, $x = (1+x) - 1$.

(d) La famille $2x - x^3 + 1$, $5x^2 + x^3$, $x^2 - 3x^3$ dans $\mathbb{R}_3[x]$ est libre. En effet, soient $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \cdot (2x - x^3 + 1) + \mu \cdot (5x^2 + x^3) + \eta \cdot (x^2 - 3x^3) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, on a

$$\begin{cases} \lambda=0 \\ 2\lambda=0 \\ 5\mu-\eta=0 \\ -\lambda+\mu-3\eta=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \\ \eta=0 \end{cases}.$$

• Cette famille ne forme pas une base de $\mathbb{R}_3[x]$. Pour le montrer on peut noter que la famille considérée est une famille libre à 3 éléments, tandis que la dimension de $\mathbb{R}_3[x]$ est 4.

Théorème 1.17 : Toute famille libre peut être complétée de manière à former une base.

3. **Indépendance linéaire de fonctions** ($\star\star$)

Montrer si les fonctions données si-dessous forment soit une famille libre, soit liée dans l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

ci

(a) $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 2x^4$

(b) $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(2x)$, $h(x) = \cos(4x)$,

(c) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x+3}$,

(d) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x^2}$, $h(x) = 3^{x^3}$.

Solution :

(a) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $F(x) = \lambda \cdot 3x^2 + \mu \cdot 2x^4 \equiv 0$. Alors, on a aussi que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(\lambda \cdot 3x^2 + \mu \cdot 2x^4) = 6\lambda x + 8\mu x^3 \equiv 0.$$

c'est pour obtenir 2 éqq. en 2 inconnues. C'est juste une façon de le faire

Prenons $x = 1$. Alors, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 3\lambda+2\mu=0 \\ 6\lambda+8\mu=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\lambda+2\mu=0 \\ 4\mu=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \end{cases}.$$

Donc, la famille $\{f(x), g(x)\}$ est libre.

(b) Soient $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ tels que $F(x) = \lambda\cos(x) + \mu\cos(2x) + \eta\cos(4x) \equiv 0$. On peut évaluer la fonction $F(x)$ en points $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}, x_3 = \pi$ pour obtenir le système suivant :

aux

$$\begin{cases} \lambda+\mu+\eta=0 \\ -\mu+\eta=0 \\ -\lambda+\mu+\eta=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu+\eta=0 \\ \mu-\eta=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \\ \eta=0 \end{cases}.$$

Donc, la famille $\{f(x), g(x), h(x)\}$ est libre.

(c) On a que $g(x) = 3^{x+3} = 27 \cdot 3^x = 27 \cdot f(x)$. Donc, pour $\lambda = 27$ et $\mu = -1$, on a $\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x) \equiv 0$, donc $f(x), g(x)$ est une famille liée.

(d) Soient $\lambda, \mu, \eta \in \mathbb{R}$ tels que $F(x) = \lambda \cdot 3^x + \mu \cdot 3^{x^2} + \eta \cdot 3^{x^3} \equiv 0$. Alors, on a que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(\lambda \cdot 3^x + \mu \cdot 3^{x^2} + \eta \cdot 3^{x^3}) = \lambda \cancel{\ln(3)}3^x + 2\mu \cancel{\ln(3)}x \cdot 3^{x^2} + 3\eta \cancel{\ln(3)}x^2 \cdot 3^{x^3} \equiv 0.$$

Maintenant on peut, par exemple, évaluer les fonctions $F(x), F'(x)$ en $x_1 = 0$ et la fonction $F'(x)$ en $x_2 = 1$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \eta = 0 \\ \lambda = 0 \\ \lambda + 2\mu + 3\eta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu + \eta = 0 \\ 2\mu + 3\eta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \eta = 0 \end{cases}.$$

Donc, la famille $\{f(x), g(x), h(x)\}$ est libre.

4. **Interpolation lagrangienne** $(\star\star\star)$

(a) Soient a_0, a_1 des nombres réels tels que $a_0 \neq a_1$. Construire les polynômes linéaires f_0 et f_1 tels que $f_i(a_j) = 0,\ i \neq j$, et $f_i(a_i) = 1,\ i = 0, 1$.

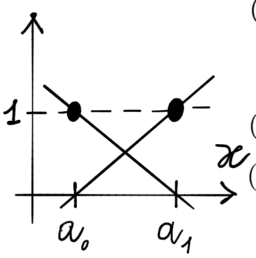
espaces des...

(b) Les polynômes f_0 et f_1 forment-ils une famille libre dans l'espace $\mathbb{R}_1[x]$?

(c) Montrer que tout élément $g \in \mathbb{R}_1[x]$ peut s'écrire sous la forme $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1$ où $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$.

(d) Montrer que pour tout $b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme $F \in \mathbb{R}_1[x]$ tel que $F(a_i) = b_i,\ i = 0, 1$.

(e) Soient $m > 1$ et $a_0, \dots, a_m$ des nombres réels tels que $a_i \neq a_j,\ i \neq j$. Montrer que pour tout $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, il existe un unique polynome $F \in \mathbb{R}_m[x]$ tel que $F(a_i) = b_i,\ i = 0, 1, \dots, m$.



Solution :

(a) Prenons $f_0 = \dfrac{x - a_1}{a_0 - a_1}, f_1 = \dfrac{x - a_0}{a_1 - a_0}$. linéaires, satisfont les conditions exigées

(b) Supposons qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0$. Alors, on a par (a) que $0 = \lambda_0 f_0(a_0) + \lambda_1 f_1(a_0) = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot 0 = \lambda_0$ et $0 = \lambda_0 f_0(a_1) + \lambda_1 f_1(a_1) = \lambda_0 \cdot 0 + \lambda_1 \cdot 1 = \lambda_1$. Donc, f_0 et f_1 forment une famille libre dans $\mathbb{R}_1[x]$.

(c) **I.** Soit $g(x) = kx + b \in \mathbb{R}_1[x]$ un polynôme linéaire quelconque. Définissons $\lambda_0 = g(a_0)$ et $\lambda_1 = g(a_1)$. Alors, on a (combinaison linéaire de f_0 et f_1)

remplace f_0 et f_1

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = g(a_0) f_0 + g(a_1) f_1 = \frac{(ka_0 + b)(x - a_1) - (ka_1 + b)(x - a_0)}{a_0 - a_1} =$$

$$\frac{ka_0 x + \cancel{bx} - \cancel{ka_0 a_1} - ba_1 - ka_1 x - \cancel{bx} + \cancel{ka_0 a_1} + ba_0}{a_0 - a_1} = \frac{kx(a_0 - a_1) + b(a_0 - a_1)}{a_0 - a_1} = kx + b = g(x).$$

Théorème 1.21 • **II.** Si V est un espace vectoriel de dimension n, alors toute famille libre de V qui compte n éléments est une base. La dimension de $\mathbb{R}_1[x]$ est 2, et $\{f_0, f_1\}$ est une famille libre dans $\mathbb{R}_1[x]$. Alors, $\{f_0, f_1\}$ est une base de $\mathbb{R}_1[x]$, donc tout élément $g \in \mathbb{R}_1[x]$ peut s'écrire sous la forme $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1$ où $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$.

(d) Soit $F = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1$ un polynôme dans $\mathbb{R}_1[x]$. Alors, par définition de f_0, f_1 on a :

$$\begin{cases} F(a_0) = \lambda_0 f_0(a_0) + \lambda_1 f_1(a_0) \\ F(a_1) = \lambda_0 f_0(a_1) + \lambda_1 f_1(a_1) \end{cases} \iff \begin{cases} F(a_0) = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \cdot 0 \\ F(a_1) = \lambda_0 \cdot 0 + \lambda_1 \cdot 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_0 = F(a_0) \\ \lambda_1 = F(a_1) \end{cases}. \tag{1}$$

Soient b_0, b_1 des nombres réels quelconques. Alors, par application de (1) le polynôme F tel que $F(a_0) = b_0$ et $F(a_1) = b_1$ est égal à $b_0 f_0 + b_1 f_1$.

(e) **Step 1.** Définissons $f_i(x) = \prod_{j \neq i} \dfrac{x - a_j}{a_i - a_j},\ i = 0, 1, \dots, m$. Pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, le polynôme f_i est de degré $\leqslant m$. De plus, on a $f_i(a_i) = 1,\ i = 0, 1, \dots, m$, et $f_i(a_j) = 0,\ i \neq j$.

Step 2. La famille $\{f_0, \dots, f_m\}$ est libre. En effet, si $\lambda_0 f_0 + \dots \lambda_m f_m = 0$, alors pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, on a $\lambda_0 f_0(a_i) + \dots + \lambda_m f_m(a_i) = 0$, donc, $\lambda_i f_i(a_i) = \lambda_i = 0,\ i = 0, 1, \dots, m$.

Step 3. La dimension de $\mathbb{R}_m[x]$ est égale à $m + 1$, et $\{f_0, \dots, f_m\}$ est une famille de $m + 1$ éléments, donc, elle est une base. Alors, tout $F \in \mathbb{R}_m[x]$ s'écrit de manière unique sous la forme $F = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_m f_m$ où $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. De plus, on a $\lambda_i = F(a_i),\ i = 0, 1, \dots, m$.

Step 4. Finalement, pour tout $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, le polynôme $F \in \mathbb{R}_m[x]$ tel que $F(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ s'écrit de manière unique comme la somme $b_0 f_0 + \dots + b_m f_m$.