UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Algèbre I
Corrigé Série 4

8 octobre 2020

1. **Sous-espace des matrices symétriques et antisymétriques** ($\star\star$)

Soit $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées sur $\mathbb{R}$ de taille n. Pour tout $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, la transposée de A est définie comme $A^\top = (a_{ij}^\top)_{i,j=1,\dots,n}$, telle que $a_{ij}^\top = a_{ji}$, pour tout $i, j = 1, \dots, n$ (c.-à-d., on échange les lignes avec les colonnes).

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A = A^\top\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (appelé le *sous-espace des matrices symétriques*).

Sol.: *D'abord on remarque que pour une matrice symétrique on a : $a_{ji} = a_{ij}$, pour tout $i, j = 1, \dots, n$. On applique la Proposition 1.4. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$:*

- *$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est clairement non-vide, par exemple, la matrice nulle appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$;*
- *$(A+B)^\top = A^\top + B^\top$. En composantes, on a : $(a_{ij} + b_{ij})^\top = a_{ij}^\top + b_{ij}^\top = a_{ji} + b_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.*
- *$(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$. En composantes, on a : $(\lambda a_{ij})^\top = \lambda a_{ij}^\top = \lambda a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.*

Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. $\square$

(b) Donner une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans le cas où $n = 3$.

Sol.: *Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors pour $n = 3$ il existe des coefficients $a_i \in \mathbb{R}$, tels que*

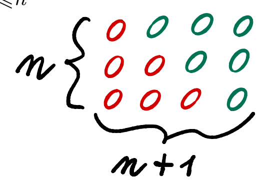
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} = a_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:E_1} + a_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:E_2} + a_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:E_3}$$
$$+ a_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:E_4} + a_5 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:E_5} + a_6 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=:E_6}$$
$$= \sum_{i=1}^{6} a_i E_i.$$

Donc $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ est libre car la seule possibilité d'obtenir la matrice nulle est $a_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, 6$. Elle est aussi génératrice car toute $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se décompose sur la famille $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$.

(c) Quelle est la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

Sol.: *Pour n général, on a comme degrés de liberté les coefficients $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n,\\ i \leqslant j \leqslant n}}$, donc*

Preuve géométrique :



$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

SKIP?

Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid A = -A^\top\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (appelé le *sous-espace des matrices antisymétriques*).

Sol.: *D'abord on remarque que pour une matrice antisymétrique on a : $a_{ji} = -a_{ij}$, pour tout $i, j = 1, \dots, n$. On applique la Proposition 1.4. Soient $A, B \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:*

- *$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est clairement non-vide, par exemple, la matrice nulle appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$;*
- *$(A+B)^\top = A^\top + B^\top = -A - B = -(A+B)$. En composantes, on a : $(a_{ij} + b_{ij})^\top = a_{ij}^\top + b_{ij}^\top = a_{ji} + b_{ji} = -a_{ij} - b_{ij} = -(a_{ij} + b_{ij})$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.*

Difficulté : ($\star$) niveau basique ; ($\star\star$) niveau de l'examen ; ($\star\star\star$) niveau avancé.

- $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top = -\lambda A$. *En composantes, on a :* $(\lambda a_{ij})^\top = \lambda a_{ij}^\top = \lambda a_{ji} = -\lambda a_{ij}$ *pour tout* $i,j = 1,\dots,n$.

Donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. □

(b) Donner une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ dans le cas où $n = 3$.

Sol.: *Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, pour $n = 3$ alors il existe des $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:E_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=:E_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:E_3} = aE_1 + bE_2 + cE_3.$$

Donc $\{E_1, E_2, E_3\}$ est libre car la seule possibilité d'obtenir la matrice nulle est $a = b = c = 0$. Elle est aussi génératrice car toute $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ se décompose sur la famille $\{E_1, E_2, E_3\}$.

(c) Quelle est la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$?

Sol.: *Pour n général, on a comme degrés de liberté les coefficients $(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n-1 \\ i<j\leqslant n}}$, donc*

$$\dim\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

2. **Compléter une famille libre en une base** ($\star$) (c'était un exercice à l'examen de rattrapage en août 2019)

Considérer l'ensemble suivant de matrices :

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. (toujours la déf. de famille libre)

Sol.: *La famille $\mathcal{F}$ est libre si*

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

et on trouve facilement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ est la seule solution. Donc oui, $\mathcal{F}$ est bien une famille libre.

(b) Compléter $\mathcal{F}$ en une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Justifier votre réponse.

Sol.: *Comme $\dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$ et $|\mathcal{F}| = 3$, il suffit d'ajouter à la famille $\mathcal{F}$ une matrice qui ne soit pas combinaison linéaire des autres matrices dans $\mathcal{F}$ pour obtenir une base. Prenons, par exemple, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que l'on ne peut pas écrire $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des autres éléments de E, car le système*

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

n'admets pas de solution. Donc la famille

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est bien une base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

3. **Somme, intersection et dimension de sous-espaces** ($\star\star$)

• SOMME DE S.E.V ⇝ S.E.V.

• INTERSECTION DE S.E.V. ⇝ S.E.V.

(a) Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Donner un exemple non-trivial pour comparer $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

N.B.: $G + H \neq G \cup H$!!!

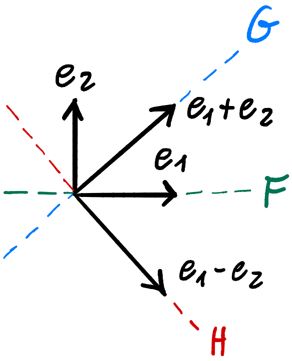
Sol.:

on a commencé avec w quelconque appartenant à $(F\cap G)+(F\cap H)$, et on conclut que...

- *D'après le cours (Sec. 1.8 ; regarder les définitions), on a que $G + H$, $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.*
- *On prend un vecteur $w \in (F \cap G) + (F \cap H)$, alors, par définition de $+$, il existe $u \in (F \cap G)$ et $v \in (F \cap H)$ tels que $w = u + v$. Cela veut dire, par définition de $\cap$, que $u \in F$, $v \in F$, $u \in G$ et $v \in H$. Donc on a à la fois $u + v = w \in F$ et $w \in (G + H)$, c.-à-d., $w \in F \cap (G + H)$. Donc on a l'inclusion : $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H)$.*

Un contre-exemple suffit ici : $E = \mathbb{R}^2$

- *L'inclusion inverse n'est pas toujours vraie. Par exemple, on considère $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}\{e_1\}$, $G = \mathrm{Vect}\{e_1 + e_2\}$, $H = \mathrm{Vect}\{e_1 - e_2\}$. On a donc $G + H = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$, $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0_E\}$, $F \cap (G + H) = F$, donc $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. C.-à-d., en général $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$ ne sont pas égaux !*



(b) Soient U et V deux sous-espaces de $\mathbb{R}^6$ tels que $\dim(U) = 2$ et $\dim(V) = 5$.

i. Quelles sont les valeurs minimales et maximales de $\dim(U + V)$? Donner des exemples concrets.

Sol.:

- *L'espace $U + V$ contient vecteurs en U et en V. Donc $\dim(U + V) \geqslant \max(2, 5) = 5$. Par exemple, on prend $U = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}$ et $V = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$, où e_i sont les vecteurs de la base canonique. On remarque que $U \subset V$, et on a $U + V = V$.*
- *$(U + V) \subset \mathbb{R}^6$, donc $\dim(U + V) \leqslant 6$. Par exemple, $V = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$ et $U = \mathrm{Vect}\{e_5, e_6\}$. Alors $U + V = \mathbb{R}^6$.* Ainsi, la dimension maximale est atteinte.

ii. Quelles sont les valeurs minimales et maximales de $\dim(U \cap V)$? Donner des exemples concrets.

Sol.: *Par la formule de Grassmann, on a*

$$\dim(U \cap V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) = 2 + 5 - \underbrace{(\geqslant 5 \text{ ou } \leqslant 6)}_{\text{par i.}}, \quad \begin{cases} 7-5=2 \\ 7-6=1 \end{cases}$$

donc $1 \leqslant \dim(U \cap V) \leqslant 2$. Pour les exemples ci-dessus, on a respectivement $\dim(U \cap V) = \dim(\mathrm{Vect}\{e_1, e_2\}) = 2$ et $\dim(U \cap V) = \dim(\mathrm{Vect}\{e_5\}) = 1$.

(c) Considérer les sous-espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3z - 4t = 0 \text{ et } 3z - 2t = 0\},$$

$$W = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 0, 0), (0, 4, 0, 0), (2, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

i. Calculer la dimension de U et de W.

Sol.: *On va d'abord trouver une base de U. On commence par résoudre le système*

$$\begin{cases} 2x + 3z - 4t = 0, & \rightsquigarrow x = t \\ 3z - 2t = 0. & \rightsquigarrow z = \frac{2}{3}t \end{cases}$$

De la 2^e^ équation on tire $z = \frac{2}{3}t$, et en le remplaçant dans la 1^re^ on obtient $x = t$. Donc

$$(x, y, z, t) = \left(t, y, \tfrac{2}{3}t, t\right) = t\left(1, 0, \tfrac{2}{3}, 1\right) + y\,(0, 1, 0, 0) = t\,v_1 + y\,v_2.$$

*On montre que $\mathcal{A} = \{v_1, v_2\}$ est une **base** de U :*

- *$\mathcal{A}$ est **génératrice** pour U car tout vecteur qui appartient à U peut s'écrire comme combinaison linéaire de v_1 et v_2 ;*
- *$\mathcal{A}$ est **libre** car pour $a, b \in \mathbb{R}$* puoi continuare ad utilizzare t & y...

$$a\,v_1 + b\,v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(a, b, \tfrac{2}{3}a, a\right) = (0, 0, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad a = b = 0.$$

Donc $\mathcal{A} = \{v_1, v_2\}$ est un base de U. Donc $\dim(U) = 2$.

*Maintenant pour la dimension de W. On remarque que, par définition, $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ engendre W. On va trouver une base de W en extrayant un ensemble $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. On va montrer que $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_4\}$ est une **base** de W :*

"D'une famille génératrice on peut toujours extraire une base"

- *on remarque que $w_3 = 2w_1 - \frac{1}{4}w_2$, et donc tout $w_i \in \mathcal{B}$ est engendré par $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_4\}$. Puisque $W = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$, on a aussi $W = \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$, c.-à-d., $\mathcal{C}$ est **génératrice** pour W.*

- *Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, $aw_1 + bw_2 + cw_4 = (a, 4b, 0, c) = (0,0,0,0)$ implique $a = b = c = 0$, c.-à-d., $\mathcal{C}$ est **libre**.*

Donc $\mathcal{C}$ est une base de W. Donc $\dim(W) = 3$.

ii. Montrer que $U + W = \mathbb{R}^4$.

SKIP

Sol.: *D'abord on montre que $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} = \{v_1, v_2, w_1, w_2, w_4\} = \{(1, 0, \frac{2}{3}, 1), e_2, e_1, 4e_2, e_4\}$ engendre la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. On remarque que $e_1, e_2, e_4 \in \mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ (car $e_1 = w_1$, $e_2 = v_2$ et $e_4 = w_4$) et $e_3 = \frac{3}{2}(v_1 - w_1 - w_4)$. Donc $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subseteq \mathrm{Vect}\{\mathcal{A} \cup \mathcal{C}\}$. Tous les vecteurs considérés sont dans $\mathbb{R}^4$, c.-à-d., on a l'autre inclusion $\mathrm{Vect}\{\mathcal{A} \cup \mathcal{C}\} \subseteq \mathbb{R}^4$, donc on en déduit $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Vect}\{\mathcal{A} \cup \mathcal{C}\}$. Or $\mathrm{Vect}\{\mathcal{A} \cup \mathcal{C}\} = \mathrm{Vect}\{\mathcal{A}\} + \mathrm{Vect}\{\mathcal{C}\}$, car toute combinaison linéaire de $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ est la somme d'une combinaison linéaire de $\mathcal{A}$ et d'une combinaison linéaire de $\mathcal{C}$. Finalement*

$$U + W = \mathrm{Vect}\{\mathcal{A}\} + \mathrm{Vect}\{\mathcal{C}\} = \mathrm{Vect}\{\mathcal{A} \cup \mathcal{C}\} = \mathbb{R}^4.$$

Ils ont déjà vue la formule de Grassmann, donc on peut l'utiliser.

□

- ***Sol. alternative :*** *On remarque que $\mathrm{Vect}\{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}\} = \mathrm{Vect}\{e_2\}$, donc $\dim(\mathrm{Vect}\{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}\}) = 1$. La formule de Grassmann nous donne*

$\mathcal{A}$ base pour U

$\mathcal{C}$ base pour W

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Vect}\{\mathcal{A} \cup \mathcal{C}\}) &= \dim(\mathrm{Vect}\{\mathcal{A}\}) + \dim(\mathrm{Vect}\{\mathcal{C}\}) - \dim(\mathrm{Vect}\{\mathcal{A} \cap \mathcal{C}\}) \\ &= 2 + 3 - 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4). \end{aligned}$$

Donc $U + W = \mathbb{R}^4$. □

4. **Dimension de $V_1 \times V_2$** ($\star\star$)

On rappelle la notion de produit cartésien de deux ensembles A et B :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Montrer la proposition suivante :

Proposition 1. Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels de dimension finie, alors $\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

Indication : Construire une famille appropriée $\mathcal{B}$ de vecteurs de $V_1 \times V_2$ et montrer que $\mathcal{B}$ est à la fois génératrice et libre pour l'espace $V_1 \times V_2$.

Sol.: *Soient $\mathcal{B}_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{b_1, \ldots, b_p\}$ des bases de V_1 et V_2. On affirme que la famille :*

$$\mathcal{B} = \{(a_1, 0), (a_2, 0), \ldots, (a_n, 0), (0, b_1), (0, b_2), \ldots, (0, b_p)\}$$

*est une **base** de $V_1 \times V_2$:*

- ***génératrice** : on considère $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$, avec $v_1 = \sum_i \lambda_i a_i$, $v_2 = \sum_j \mu_j b_j$, on a*

un vecteur quelconque de $V_1 \times V_2$

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) &= (v_1, 0) + (0, v_2) = (\textstyle\sum_i \lambda_i a_i, 0) + \left(0, \sum_j \mu_j b_j\right) \\ &= \textstyle\sum_i \lambda_i (a_i, 0) + \sum_j \mu_j (0, b_j). \end{aligned}$$

ce sont exactement les vecteurs dans $\mathcal{B}$

- ***libre** :*

$$\textstyle\sum_i \lambda_i (a_i, 0) + \sum_j \mu_j (0, b_j) = (0, 0)$$

$$(\textstyle\sum_i \lambda_i a_i, \sum_j \mu_j b_j) = (0, 0)$$

$\Rightarrow \sum_i \lambda_i a_i = 0$ *et* $\sum_j \mu_j b_j = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, *et* $\mu_j = 0$, $j = 1, \ldots, p$, *puisque $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ sont des bases.* □

Exemple : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1.8 Somme directe (p.21)

$E_1 \cap E_2 = \{x \in E \mid x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\}$

$E_1 + E_2 = \{x \in E \mid \exists\, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2 \text{ t.q. } x = x_1 + x_2\}$

Pas S.E.V. : $E_1 \cup E_2$, $E_1 \setminus E$