UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Algèbre I
Série 5

15 octobre 2020

Exercice 1. (Nombres complexes) Demander

1. Écrire en forme algébrique les nombres complexes suivants:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-i}, \quad \frac{1}{i(3+2i)^2}, \quad \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}.$$

2. Calculer le module des nombres complexes suivants:

$$-3i, \quad \sqrt{3}+i, \quad 3i(2+i).$$

3. Soit $z_1 = \frac{1}{1+2i}$, $z_2 = 2-4i$, $z_3 = z_1 + z_2$. A-t-on $|z_3| = |z_1| + |z_2|$? Ce résultat est-il attendu ? Si oui, dire pourquoi, et si non, expliquer avec un dessin et donner un cas où cela ne marche pas.

Solution:

1. Astuce: $(a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

   (a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{1}{\sqrt{3}-i} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{4}$

   (b) $\dfrac{1}{i(3+2i)^2} = \dfrac{1}{i(3+2i)^2} \cdot \dfrac{i(3-2i)^2}{i(3-2i)^2} = \dfrac{i(3-2i)^2}{-13^2} = \dfrac{i(3-2i)^2}{-169} = \dfrac{-12}{169} - i\dfrac{5}{169}$

   (c) $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)}{5} = \dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)^3 i(-\sqrt{2}i+\sqrt{3})}{5}$
   $= \dfrac{5i(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{5} = i(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = i(1+i2\sqrt{6}) = -2\sqrt{6}+i$

2. (a) $|-3i| = \sqrt{(-3)^2} = 3$

   (b) $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

   (c) $|3i(2+i)| = |6i-3| = \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$

3. Ici, $|z_1| + |z_2| = \frac{11}{\sqrt{5}}$. En effet,

$$|z_1| = \left|\frac{1}{5} - i\frac{2}{5}\right| = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad |z_2| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

   De plus

$$|z_3| = \left|\frac{11}{\sqrt{5}} - i\frac{22}{5}\right| = \sqrt{\frac{11^2+22^2}{25}} = \sqrt{\frac{121\cdot 5}{25}} = \frac{11}{\sqrt{5}}.$$

   On obtient le même résultat, ce qui est inattendu. En effet de manière générale, la somme des modules n'est pas égale au module de la somme. Ce n'est vrai que lorsque les vecteurs sont colinéaires (ce qui est le cas ici). Contre-exemple: $z_1 = 1+i$ et $z_2 = 1-i$ alors $|z_1| + |z_2| = \sqrt{2}+\sqrt{2}$ alors que $|z_3| = |2| = 2$.

Exercice 2. (Nombres complexes) Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Montrer que

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
2. si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$,
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$,
4. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$,
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$.
   Indication: Montrer d'abord que $|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$. *Pour cela, utiliser les propriétés:* $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ $2\mathrm{R}(z) = z + \overline{z}$ *et* $\mathrm{R}(z) \leq |z|$.

Solution: Soient $z = a + ib$ et $w = c + id$ alors

1. $|z| \cdot |w| = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 - 2abcd + (ad)^2 + (bc)^2 + 2abcd} \\ &= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} \end{aligned}$$

2. $|z^{-1}| = \left|\frac{1}{a+ib}\right| = \left|\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right| = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$

   $|z|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$

3. Preuve par double implication:
   [$\Longrightarrow$] Supposons que $z = a + ib \in \mathbb{R}$ alors $b = 0$ et $\overline{z} = \overline{a + i \cdot 0} = a - i \cdot 0 = a = z$.
   [$\Longleftarrow$] Supposons que $z = \overline{z}$ alors $a + ib = a - ib \iff 2ib = 0 \iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.

4. Preuve par double implication:
   [$\Longrightarrow$] Supposons que $z = a + ib \in i\mathbb{R}$ alors $a = 0$ et $\overline{z} = \overline{0 + ib} = 0 - ib = -z$.
   [$\Longleftarrow$] Supposons que $-z = \overline{z}$ alors $-a - ib = a - ib \iff 2a = 0 \iff a = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$.

5. Montrons d'abord l'indication:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + w\overline{z} + z\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 + w\overline{z} + \overline{\overline{z}}\,\overline{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + w\overline{z} + \overline{\overline{z}w} = |z|^2 + |w|^2 + w\overline{z} + \overline{w\overline{z}} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{R}(w\overline{z}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|w\overline{z}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|w||\overline{z}| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|w||z| \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

   Comme le module est toujours positif, on a: $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2 \implies |z+w| \leq |z| + |w|$.

Exercice 3. (Argument et forme polaire)

1. Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants: $-\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ $\quad r_1 = 2\sqrt{2}$

$$-42i, \quad 1 + \sqrt{3}i, \quad \frac{\sqrt{2}}{(1+i)}, \quad \frac{\sqrt{2}(-1+\sqrt{3}i)}{1-i}.$$

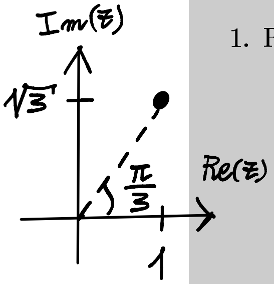
$1 - i$ $\quad r_2 = \sqrt{2}$

2. Mettre sous forme algébrique le nombre complexe z_1 de module 3 et d'argument $\frac{-2\pi}{3}$ et le nombre complexe z_2 de module 2 et d'argument $\frac{2019\pi}{6}$.

3. Soient z et z' deux nombres complexes de modules r et r' et d'arguments θ et θ'. Montrer que:

$$|z+z'| = |z-z'| \iff \theta' = \theta + \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Solution:



1. Rappel: Si $z = a + ib = re^{i\theta}$ alors $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $cos(\theta) = \frac{a}{r}$ et $sin(\theta) = \frac{b}{r}$. Ainsi:
   (a) $42e^{i\frac{\pi}{2}}$ car $cos(\theta) = 0$ et $sin(\theta) = 1$.
   (b) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ car $r = \sqrt{1+3} = 2$, $cos(\theta) = \frac{1}{2}$ et $sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

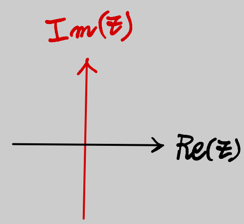
   $\frac{\sqrt{2}}{(1+i)} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{1+1}$

   (c) $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ En effet, $\frac{\sqrt{2}}{(1+i)} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $r = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1$, $cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (d) $2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ Remarquons que si $z = \frac{w_1}{w_2}$ alors $z = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$. Ici, $w_1 = \sqrt{2}(-1+\sqrt{3}i)$ et $w_2 = 1 - i$. Ainsi $r_1 = 2\sqrt{2}$, $cos(\theta_1) = \frac{-1}{2}$, $sin(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_2 = \sqrt{2}$, $cos(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin(\theta_2) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Donc $\theta_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{-\pi}{4}$ et $\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{-\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$.

2. Comme $cos(\frac{-2\pi}{3}) = \frac{-1}{2}$ et $sin(\frac{-2\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ alors $3(cos(\frac{-2\pi}{3}) + isin(\frac{-2\pi}{3})) = \frac{-3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et, en remarquant que $\frac{2019\pi}{6} = 336\pi + \frac{\pi}{2}$, $2(cos(\frac{2019\pi}{6}) + isin(\frac{2019\pi}{6})) = 2(cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2})) = 2i$.

3. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} |z+z'| = |z-z'| &\iff (z+z')\overline{(z+z')} = (z-z')\overline{(z-z')} \\ &\iff (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = (z-z')(\overline{z}-\overline{z'}) \\ &\iff z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} = z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &\iff z\overline{z'} + z'\overline{z} = -(z\overline{z'} + z'\overline{z}) \\ &\iff 2\mathrm{R}(z\overline{z'}) = -2\mathrm{R}(z\overline{z'}) \end{aligned}$$



Donc $|z+z'| = |z-z'| \iff \mathrm{R}(z\overline{z'}) = 0 \iff Arg(z\overline{z'}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Comme $Arg(z\overline{z'}) = Arg(z) + Arg(\overline{z'}) = Arg(z) - Arg(z') = \theta - \theta'$ alors

$$|z+z'| = |z-z'| \iff \theta - \theta' = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 4. (Équations avec des nombres complexes)

1. Résolvez les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ avec la formule habituelle pour résoudre les équations générales du second degré. Vérifiez les solutions trouvées.

$$z^2 + 2z + 3 = 0, \quad z^2 + 2iz - 3 = 0.$$

2. Résolvez l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en utlisant la forme algébrique de z:

$$z + 3i + \mathrm{Re}(z)(i + (\mathrm{Im}(z))^2) = 0.$$

3. Résolvez l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ en utilisant la forme polaire de z:

$$z^3 = \sqrt{3} - i.$$

4. Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ un polynôme avec $a_i \in \mathbb{R}$. Montrer que si z est racine de P, alors $\bar{z}$ est aussi racine de P.

Solution:

1. En utilisant directement la formule, on trouve que $\Delta = 4 - 12 = -8 = i^2 \cdot 8$ donc $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{8}$ et $z = \frac{-2 \pm i\sqrt{8}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2}$ pour la première equation, et $\Delta = -4 + 12 = 8$, $z = \frac{-2i \pm \sqrt{8}}{2} = -i \pm \sqrt{2}$ pour la seconde.

2. On pose $z = a + ib$ et on obtient l'équation:
$$a + ib + 3i + a(i + b^2) = a + ab^2 + i(a + b + 3) = 0.$$
Il faut donc que $a + ab^2 = 0$ et que $a + b + 3 = 0$. Donc $a = 0$ et $b = -3$.

3. On pose $z = re^{i\theta}$:
$$r^3 e^{i3\theta} = \sqrt{3} - i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$
On a donc $r = \sqrt[3]{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{18}$

il manque les autres deux

4. Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ un polynôme avec $a_i \in \mathbb{R}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que z_0 est une racine de P, i.e. $a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n = 0$. Alors, comme le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, comme le conjugué d'un produit est le produit des conjugués et comme les coefficients a_i sont réels, $0 = \overline{a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n} = a_0 + a_1 \bar{z_0} + \ldots + a_n \bar{z_0}^n$, donc $\bar{z_0}$ est aussi racine de P.

Exercice 5. (Racines de complexes) À l'aide de la formule de De Moivre, trouver la somme des racines n-ièmes de 1.

Solution: Les racine n-ième de l'unité sont de la forme $z_k = cos(\frac{2k\pi}{n}) + isin(\frac{2k\pi}{n})$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Montrons que $z_k = (z_1)^k$ en utilisant la formule de Moivre:
$$(z_1)^k = \left(cos(\frac{2\pi}{n}) + isin(\frac{2\pi}{n})\right)^k = cos(\frac{2k\pi}{n}) + isin(\frac{2k\pi}{n}) = z_k.$$
Maintenant, on a
$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} (z_1)^k = \frac{1 - (z_1)^n}{1 - z_1} = \frac{1-1}{1 - z_1} = 0$$

Série géometrique

Exercice 6. (Espaces vectoriels) Pour chacun des espaces suivants, dire si c'est un espace vectoriel ou non.

1. l'espace $E = \mathbb{R}^n$ sur le corps $\mathbb{C}$ avec l'addition et la multiplication scalaire usuelles.
2. l'espace $E = \mathbb{C}^n$ sur le corps $\mathbb{R}$ avec l'addition et la multiplication scalaire usuelles.
3. l'espace $E = \mathbb{C}^n$ sur le corps $\mathbb{C}$ avec l'addition $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ et la multiplication scalaire $\lambda \cdot x = \text{Re}(\lambda)x$.

Solution:

1. Non. En effet, la multiplication par un scalaire n'est pas stable: prenons $i \in \mathbb{C}$ et $x = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ alors
$$i \cdot x = (i, i, ..., i) \notin \mathbb{R}^n.$$

2. Oui. Montrons ça par recurrence. Pour $n = 1$: $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel reel. En effet, tous les axiomes sont vérifiés par le fait que $\mathbb{C}$ est un corps. Supposons maintenant que $\mathbb{C}^k$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \leq n$, et montrons que $\mathbb{C}^{n+1}$ est un espace vectoriel. On a vu que si V et V' sont des espaces vectoriel, alors $V \times V'$ est aussi un espace vectoriel. Donc $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ est un espace vectoriel.

3. Non. En effet, la compatibilité (axiome B1) n'est pas vérifiée:

$$(i \cdot i) \cdot 1 = (-1) \cdot 1 = -1 \quad \neq \quad i \cdot (i \cdot 1) = i \cdot 0 = 0.$$

Exercice 7. (Familles libres et génératrices) Trouver si les vecteurs donnés ci-dessous forment une famille libre et/ou génératrice.

1. 1 et $-6 + 10i$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$,
2. $1 + \sqrt{3}i$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$,
3. $(0, -(i+2))$ et $(-(i-2), -i)$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$,

Il s'agit de deux couples de nombres complexes

Solution:

1. Regardons d'abord si cette famille est libre. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \cdot 1 + \mu(-6 + 10i) = 0$. Cela implique que $\lambda - 6\mu = 0$ et $10\mu = 0$ et donc que $\mu = 0$ et $\lambda = 0$. Donc la famille est libre.

   Maintenant regardons si c'est une famille génératrice. Soient $z = a+ib \in \mathbb{C}$ alors $z = \lambda \cdot 1 + \mu(-6+10i)$ implique que $\mu = \frac{b}{10}$ et $\lambda = a - \frac{3}{5}b$. Donc la famille génère l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ et la famille est une base.

2. Regardons d'abord si cette famille est libre. Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda(1 + \sqrt{3}i) = 0$. Alors $(a+ib)(1+\sqrt{3}i) = a+ib+a\sqrt{3}i - b\sqrt{3} = a - b\sqrt{3} + i(b + a\sqrt{3}) = 0$ donc $a - b\sqrt{3} = 0$ et $b + a\sqrt{3} = 0$. Ce qui implique que $a = b = 0$ donc $\lambda = 0$ et donc cette famille est libre.

   De plus, cette famille est génératrice: en effet, soit $z = c + id \in \mathbb{C}$ alors $\lambda(1 + \sqrt{3}i) = c + id$ donne $(a + ib)(1 + \sqrt{3}) = c + id$. Cela induit $a = \frac{c+d\sqrt{3}}{4}$ et $b = \frac{d-c\sqrt{3}}{4}$. Et donc $1 + \sqrt{3}i$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.

   Remarquons que l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2 mais l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$ est de dimension 1.

3. Regardons d'abord si cette famille est libre. Soit $\lambda = a + ib, \mu = c + id \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda(0, -(i+2)) + \mu(-(i-2), -i) = 0$. Ce qui implique que $-\mu(i-2) = 0$ et $-\lambda(i+2) - i\mu = 0$ donc $(c+id)(i-2) = 0$ et $-(a+ib)(i+2) - i(c+id) = 0$. On obtient donc $c - 2d = 0$, $d - 2c = 0$, $2a - b - d = 0$, $a + 2b + c = 0$ ce qui implique $a = b = c = d = 0$. Donc la famille est libre.

   De plus, la famille est génératrice. En effet, on remarque très facilement que $F = \{(0,1), (1,0)\}$ génère notre espace vectoriel: soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ alors $(z, w) = z(1, 0) + w(0, 1)$. Maintenant montrons que $(0, -(i+2))$ et $(-(i-2), -i)$ génère notre famille F: $(1, 0) = \lambda(0, -(i+2)) + \mu(-(i-2), -i)$ lorsque $\mu = \frac{1}{-i+2}$ et $\lambda = \frac{2i-1}{-5(1+2)}$ et $(0, 1) = \lambda(0, -(i+2)) + \mu(-(i-2), -i)$ lorsque $\mu = 0$ et $\lambda = \frac{-1}{i+2}$. Donc $(0, -(i+2))$ et $(-(i-2), -i)$ est une base de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$.