UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Algèbre I
Série 6

À rendre pour le 22 octobre 2020

Exercice 1. Systèmes linéaires à résoudre en échelonnant les matrices correspondantes
Résoudre les systèmes linéaires suivants, en travaillant avec les matrices correspondantes et leur forme échelonnée :

$$(a)\begin{cases} x-2y+3z=1\\ 2x-3y+5z=0\\ -x+4y-\ z=-1\end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} 3x+\ y+\ z=8\\ -2x+\ y-3z=-22\\ x\qquad+\ z=7\\ 3x+2y+\ z=5\end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} x_1-\ 5x_2-\ x_3+12x_4-\ x_5\qquad=-4\\ -2x_1+10x_2+3x_3-33x_4+2x_5+x_6=4\\ x_3-\ 9x_4+\ x_5\qquad=8\\ x_1-\ 5x_2+2x_3-15x_4+2x_5+x_6=14\end{cases}$$

Solution:

$$(a)\left[\begin{array}{ccc|c} 1&-2&3&1\\ 2&-3&5&0\\ -1&4&-1&-1\end{array}\right] \begin{array}{c}\xrightarrow{L_2-2L_1}\\ \xrightarrow{L_3+L_1}\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&-2&3&1\\ 0&1&-1&-2\\ 0&2&2&0\end{array}\right] \xrightarrow{L_3-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&-2&3&1\\ 0&1&-1&-2\\ 0&0&4&4\end{array}\right],$$

donc on obtient $z=1$, $y=z-2=-1$ et $x=2y-3z+1=-4$. Remarque : système carré (3 équations et 3 inconnues), avec solution unique $(x,y,z)=(-4,-1,1)$.

$$(b)\left[\begin{array}{ccc|c} 3&1&1&8\\ -2&1&-3&-22\\ 1&0&1&7\\ 3&2&1&5\end{array}\right] \begin{array}{c}\xrightarrow{L_2+2L_3}\\ \xrightarrow{3L_3-L_4}\\ \xrightarrow{L_4-L_1}\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3&1&1&8\\ 0&1&-1&-8\\ 0&-2&2&16\\ 0&1&0&-3\end{array}\right] \begin{array}{c}\xrightarrow{L_3+2L_4}\\ \xrightarrow{L_4-L_2}\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 3&1&1&8\\ 0&1&-1&-8\\ 0&0&2&10\\ 0&0&1&5\end{array}\right] \xrightarrow{L_4-2L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 3&1&1&8\\ 0&1&-1&-8\\ 0&0&2&10\\ 0&0&0&0\end{array}\right],$$

donc on obtient $z=5$, $y=z-8=-3$ et $x=(8-y-z)/3=2$. Remarque : système surdéterminé (4 équations et 3 inconnues), avec solution unique $(x,y,z)=(2,-3,5)$.

$$(c)\left[\begin{array}{cccccc|c} 1&-5&-1&12&-1&0&-4\\ -2&10&3&-33&2&1&4\\ 0&0&1&-9&1&0&8\\ 1&-5&2&-15&2&1&14\end{array}\right] \begin{array}{c}\xrightarrow{L_2+2L_1}\\ \\ \xrightarrow{L_4-L_1}\end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&-5&-1&12&-1&0&-4\\ 0&0&1&-9&0&1&-4\\ 0&0&1&-9&1&0&8\\ 0&0&3&-27&3&1&18\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{L_3-L_2}\\ \xrightarrow{L_4-3L_3}\end{array} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1&-5&-1&12&-1&0&-4\\ 0&0&1&-9&0&1&-4\\ 0&0&0&0&1&-1&12\\ 0&0&0&0&0&1&-6\end{array}\right].$$

Remarque : les pivots sont dans les positions de variables x_1, x_3, x_5 et x_6. Celles-ci sont appelées **variables principales**. Les autres deux variables, x_2 et x_4, sont appelées **variables libres**. Elles peuvent prendre n'importe quelles valeurs en $\mathbb{R}$. On indique cela par : $x_2 = t$, $x_4 = s$. On a donc le système :

$$\begin{cases} x_1 - 5t - x_3 + 12s - x_5 = -4 \\ x_3 - 9s + x_6 = -4 \\ x_5 - x_6 = 12 \\ x_6 = -6 \end{cases}$$

d'où on tire $x_6 = -6$, $x_5 = 12 + x_6 = 6$, $x_3 = -4 + 9s - x_6 = 2 + 9s$, et

$$x_1 = 5t + x_3 - 12s + x_5 - 4 = 5t + 2 + 9s - 12s + 6 - 4 = 4 + 5t - 3s.$$

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\{(4 + 5t - 3s,\, t,\, 2 + 9s,\, s,\, 6,\, -6) \mid s, t \in \mathbb{R}\}\,.$$

Comme on a une solution pour chaque choix des nombres s et t, il y a une infinité des solutions.

Exercice 2. Système linéaire à paramètre
Considérons le système d'équations linéaires suivant pour les inconnus x, y et z.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & m^2 \end{array}\right.$$

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$, ce système possède-t-il une solution ? Dans le cas où elle existe, est-elle unique ?

Exercice 3. Équations d'un sous-espace
Considérons les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$,

$$u_1 = (1, 2, 3), \quad u_2 = (4, 5, 6), \quad u_3 = (1, -1, 0).$$

1. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire $(1, 3, -6)$ dans la base $\{u_1, u_2, u_3\}$.
3. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1 et u_2. Écrire F sous la forme

$$F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\},$$

où a, b, c et d sont des réels à préciser.

Solution:

1. Montons que le système est libre. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Alors on a les équations $3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2$ et $\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 = 2\lambda_1 + 5\lambda_1 - \lambda_3$, donc $-\lambda_1 - 4\lambda_2 = 2\lambda_1 + 5\lambda_2$, c'est à dire $\lambda_1 = -9\lambda_2$. Cela implique $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, donc $\lambda_3 = 0$. Comme la famille est libre, et qu'elle a le même nombre d'éléments que la dimension que l'espace, c'est une base.
2. On résout l'équation, et on trouve $\lambda_1 = \frac{-26}{3}, \lambda_2 = \frac{10}{3}, \lambda_3 = \frac{-11}{3}$.
3. On a d'abord que $(0, 0, 0) \in F$, donc $a0 + b0 + c0 = 0 = d$. Ensuite, comme u_1 et u_2 sont dans F, on obtient les equations

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 4a + 5b + 6c = 0 \end{cases}$$

(on a remplacé $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ dans l'éq. $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Cela donne le systeme :

$$\begin{cases} b+2c=0 \\ a-c=0 \end{cases}$$

Donc $d=0$, $a=c=1$ et $b=-2$ sont des valeurs possible pour determiner F.

Exercice 4. Soit $\mathbb{K}$ un corps égal à $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{R}$. Soient les vecteurs $v_1=(v_1^1, v_1^2, \ldots, v_1^n), \ldots, v_n=(v_n^1, v_n^2, \ldots, v_n^n) \in \mathbb{K}^n$. Montrer que la famille $\{v_1, \ldots v_n\}$ est une base si et seulement si le système

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^1 + \ldots + \lambda_n v_n^1 = x_1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \ldots + \lambda_n v_n^2 = x_2 \\ \vdots \\ \lambda_1 v_1^n + \ldots + \lambda_n v_n^n = x_n \end{cases}$$

admet une unique solution pour tout $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{K}$.

Solution: la famille $\{v_1, \ldots v_n\}$ est une base si et seulement pour tout vecteur $x=(x_1, x_2, \ldots x_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe des uniques $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $x=\sum \lambda_i v_i$ si et seulement si pour tous $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{K}$, il existe des uniques $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ (= une unique solution) tel que le système

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1^1 + \ldots + \lambda_n v_n^1 = x_1 \\ \lambda_1 v_1^2 + \ldots + \lambda_n v_n^2 = x_2 \\ \vdots \\ \lambda_1 v_1^n + \ldots + \lambda_n v_n^n = x_n \end{cases}$$

soit satisfait.

Exercice 5. Espaces de polynômes

1. Montrer que $\mathcal{B}=\{1+2x+3x^2, 4+5x+6x^2, 1-x\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Écrire $1+3x-6x^2$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.
3. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $1+2x+3x^2$ et $4+5x+6x^2$. Écrire F sous la forme
$$F=\{\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \mid a\alpha_0+b\alpha_1+c\alpha_2=d\},$$
où a, b, c et d sont des réels à préciser.

OK

Solution: Cet exercice est exactement comme l'exercice 3. $\mathbb{R}_2[x]$ est aussi un espace vectoriel de dimension 3, et on a une correspondance entre les polynomes $a+bx+cx^2$ et les vecteurs (a,b,c). Avec cette correspondance, on remarque que cet exercice est le même !

Exercice 6. Structure affine des solutions d'un système linéaire
Pour $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, on note $S(A,b)$ l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ du système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Notation matricielle:
$Ax=b$

1. On sait que $S(A,0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que l'espace $S(A,b)$ est aussi un espace vectoriel quand $b \neq 0$?

Les solutions d'un système linéaire homogène ...

2. Trouver $S(A,0)$ et $S(A,b)$ explicitement pour les valeurs suivantes de A et b,

$Ax = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (1,1,1).$$

Dans ce cas particulier, trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que

somme de sous-espaces

$$S(A,b) = \{x\} + S(A,0) = \{x + y, y \in S(A,0)\}.$$

Remarque : on note aussi $S(A,b) = x + S(A,0)$ pour simplifier.

3. Pour A et b quelconques, montrer que si $S(A,b)$ est non-vide, alors pour tout $x \in S(A,b)$, on a $S(A,b) = x + S(A,0)$.

Solution: car $0 \notin S(A,b)$

i.e., $\mathbb{R}^3$

1. Non ! Car le vecteur nul n'est pas une solution dans ce cas !
2. Il faut que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$! Ce n'est pas tout l'espace vectoriel (par exemple, le vecteur $(1,0,0)$ n'est pas dedans) donc, $S(A,0)$ a dimension 2 ou moins. Comme $(1,-1,0)$ et $(0,1,-1)$ sont dans cet espace, qu'ils sont indépendant, ils forment une base de l'espace vectoriel $S(A,0)$. Pour $S(A,b)$, on prend $x = (1,0,0)$ par exemple.
3. Pour montrer $S(A,b) = x + S(A,0)$, on montre la chose suivante : Soient $x, y \in S(A,b)$, alors $x - y \in S(A,0)$. En effet, avec $x = (x_1, \ldots x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on trouve $x - y = (x_1 - y_1, \ldots x_n - y_n)$, donc
$$\begin{cases} a_{11}(x_1 - y_1) & + & \cdots & + & a_{1n}(x_n - y_n) & = & b_1 - b_{\cancel{1}} = 0, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x_1 - y_1) & + & \cdots & + & a_{nn}(x_n - y_n) & = & b_n - b_n = 0. \end{cases}$$

Exercice 2

La matrice ~~échelonnée~~ à échelonner est : $\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{array}\right) =: A.$

$$A \xrightarrow{L_2 - L_3 = L_3'} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{si } m\neq 0]{L_1 - mL_2 = L_2'} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m^2 & 1-m & 1-m^2 \\ 0 & m-1 & 1-m & m-m^2 \end{array}\right)$$

OK

OK

on échange 2e et 3e colonne

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & m-1 & m-m^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2' - L_3' = L_3''} \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 1-m^2 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & 1-m \end{array}\right) =: \hat{A}$$

* si $m=1$ alors $\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ 2 variables libres.

Il existe donc une infinité de solutions.

* $2-m-m^2=0 \iff m = 1$ ou -2

si $m=-2$ alors $\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ ligne incompatible

Il n'existe donc pas de solution

* si $m=0$ alors $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

échange L_1 et L_3

$$A \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - L_2 = L_2'} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2' - L_3 = L_3'} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

donc il existe une unique solution.

<u>sinon</u> (cas général, $m \neq -2, 1, 0$)

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/m & 1/m & 1/m \\ 0 & 1 & \frac{1-m^2}{1-m} & \frac{1-m^2}{1-m} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-m}{2-m^2-m} \end{array}\right)$$

et il existe une unique solution.