UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Algèbre I
Corrigé Série 7

1 novembre 2020

Exercice 1. ($\star\star$) On se donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & -13 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$Ax = 0$

et on définit $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x$ est une solution du système homogène avec A la matrice des coefficients$\}$.
(Cet ensemble est appellé le noyau de A.)

1. Montrer que $\ker(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base de $\ker(A)$.

Sol.:

1. *L'ensemble des solutions d'un système homogène forme toujours un sous espace linéaire. En effet soit (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) deux solutions, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour toute équation du système de la forme $ax + by + cz = 0$ on a*

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \\ ax_1 + by_1 + cz_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = 0$$

et $a\lambda x_1 + b\lambda y_1 + c\lambda z_1 = 0$

2. *Il faut résoudre le système $A \cdot X = 0$.* $:= (x,y,z)$ *On a :*

Forme reduite

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 7 & 6 & -13 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2' \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ L_3' \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3'' \leftarrow L_3' + L_2'}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1' + L_2'/4$; $L_2'/(-8)$

c'est à dire pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ $x = y$ et $y = z$. On en déduit que $\ker(A) = \mathrm{Vect}\big(\{(1, 1, 1)\}\big)$ et donc que$\{(1, 1, 1)\}$ forme une base de $\ker(A)$

Exercice 2. ($\star\star$) Considérons le système d'équations linéaires pour les inconnus x, y, z

$$\begin{aligned} x - y - z &= b \\ -2x + 3y + 3z &= b^2 - b + 1 \\ y + z &= b \end{aligned}$$

1. Pour quelles valeures de $b \in \mathbb{R}$, le système admet-il une solution ?
2. Pour quelles valeures de $b \in \mathbb{C}$, le système admet-il une solution ?

Sol.: *On résoud le système*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b \\ -2 & 3 & 3 & b^2 - b + 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \underset{\substack{L_1' \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2' \leftarrow L_2 - 3L_3}}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2b \\ -2 & 0 & 0 & b^2 - 4b + 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \underset{L_2'' \leftarrow L_2' + 2L_1'}{\iff} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & b^2 + 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

On a donc l'équation $b^2 + 1 = 0$ qui n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$. Sur $\mathbb{C}$, on a alors $b = i$ avec comme solution $x = 2i$, $y = i - z$ ou $b = -i$ avec comme solution $x = -2i$, $y = -i - z$

Exercice 3. Qui est linéaire ? ($\star\star$)

Pour chacune des fonctions suivantes, dites si elle est linéaire (et prouvez le !), puis, si c'est le cas, décrivez son noyau et son image. Pour les exemples de dimension finie, trouver aussi une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

1.
$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y-3z, 7x+6y-13z, -2x+4y-2z) \end{array}$$

2. (sur le corps $\mathbb{R}$)
$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -\frac{1}{2}\bar{z} \end{array}$$

3. (sur le corps $\mathbb{C}$)
$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -\frac{1}{2}\bar{z} \end{array}$$

4.
$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ p(x) & \mapsto & q(x) = p(x+1) \end{array}$$

5.
$$f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ p(x) & \mapsto & q(x) = p(x)+1 \end{array}$$

6.
$$f_7 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{C}^0([0,1]) \\ f & \mapsto & (x \mapsto \int_0^x f(y)dy) \end{array}$$

7.
$$f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ p & \mapsto & (p(0), p'(0)) \end{array}$$

} ex. dans l'examen de janvier 2019

Sol.:

1. *La fonction f_1 est definie par une collection ~~des~~ de polynômes linéaires et homogènes, donc ell e est linéaire. La matrice de f_1 est*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & -13 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$
Pour trouver $\mathrm{Ker}(f_1)$ *il faut résoudre le système* $A \cdot X = 0$. *On a alors comme pour l'exercice 1* $\mathrm{Ker}(f_1) = \ker(A) = \mathrm{Vect}\ \{(1,1,1)\}$. *L'espace* $\mathrm{Im}(f_8)$ *est de dimension 2 et est engendré par les vecteurs* $v_1 = (1,7,-2), v_2 = (2,6,4), v_3 = (-3,-13,-2)$. *Notons que* $v_1 + v_2 = -v_3$, *donc* $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}(\{v_1,v_2,v_3\}) = \mathrm{Vect}(\{v_1,v_2\})$.

2. *Soient* $z_1 = x_1 + iy_1$ *et* $z_2 = x_2 + iy_2$ *des nombres complexes quelconques, alors, on a*
$$f_2(z_1+z_2) = -\frac{1}{2}\overline{(z_1+z_2)} = -\frac{1}{2}(x_1+x_2-iy_1-iy_2) = -\frac{1}{2}(x_1-iy_1) - \frac{1}{2}(x_2-iy_2) = f_2(z_1)+f_2(z_2).$$
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ *un un nombre réel quelconque, alors*
$$f_2(\lambda z_1) = -\frac{1}{2}\overline{\lambda z_1} = -\frac{1}{2}\bar{\lambda}\overline{z_1} = -\frac{1}{2}\lambda\overline{z_1} = \lambda f_2(z_1).$$
Donc, la fonction f_2 est linéaire. De plus, elle est injective et surjective. En fait, considerons la fonction linéaire suivante
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & -2\bar{z} \end{array}.$$
On a $f_2 \circ g = g \circ f_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. *Donc,* f_2 *est bijective, donc* $\mathrm{Ker}(f_2) = 0$, *et* $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{C} = \mathrm{Vect}(\{1,i\})$.

3. *La fonction f_3 n'est pas linéaire. En fait, on a que*
$$\underbrace{-i}_{\lambda} \cdot f_3(\underbrace{-i}_{z}) = -i \cdot \frac{-1}{2} \cdot i = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = f_3(\underbrace{(\overbrace{-i}^{\lambda}) \cdot (\overbrace{-i}^{z})}_{=-1}).$$

$f_4 : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$
$p(x) \mapsto q(x) = p(x+1)$

4. *La fonction f_4 est linéaire. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $g_1(x), g_2(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, on a :*

$$f_4((\lambda g_1 + \mu g_2)(x)) = (\lambda g_1 + \mu g_2)(x+1) = \lambda g_1(x+1) + \mu g_2(x+1) = \lambda f_4(g_1(x)) + \mu f_4(g_2(x)).$$

Il est facile de montrer que la fonction h suivante est l'inverse de f_4.

$f_5 : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$
$p(x) \mapsto q(x) = p(x)+1$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[x] \\ P(x) & \mapsto & Q(x) = P(x-1) \end{array}$$

Donc, f_4 est bijective, $\mathrm{Ker}(f_4) = 0$, et $\mathrm{Im}(f_4) = \mathbb{R}_n[x] = \mathrm{Vect}(\{1, x, \ldots, x^n\})$.

5. *La fonction f_5 n'est pas linéaire. En fait, on a $f_5(0) = 1 \neq 0$.* OK (si une fonction est linéaire, 0 est envoyé à 0)

6. $$f_6 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R}_{>0}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}_{>0}) \\ f & \mapsto & (x \mapsto x^2 f(1/x)) \end{array}$$

La fonction f_6 est linéaire. En fait, si $g_1(x), g_2(x)$ sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_{>0})$, alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

pas présent dans l'énoncé !

$$f_6((\lambda g_1 + \mu g_2)(x)) = x^2(\lambda g_1 + \mu g_2)(1/x) = \lambda x^2 g_1(1/x) + \mu x^2 g_2(1/x) = \lambda f_6(g_1(x)) + \mu f_6(g_2(x)).$$

La fonction f_6 est bijective. En fait, considerons la fonction linéaire suivante.

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(\mathbb{R}_{>0}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(\mathbb{R}_{>0}) \\ f & \mapsto & \left(x \mapsto \dfrac{1}{x^2} f(1/x)\right). \end{array}$$

On a $f_6 \circ h = h \circ f_6 = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}(\mathbb{R}_{>0})}$, alors f_6 admet l'inverse et donc est bijective.

Déf.
$G(x) := \int_0^x g(y)\,dy$
Alors,
$G'(x) = g(x)$
par le TFA

7. *La fonction f_7 est linéaire (vu en cours). Si $G(x) = f_7(g(x)) = \int_0^x g(y)dy = 0$, alors $G'(x) = g(x) = 0$ pour tout x, donc, $g(x) = 0$. Alors, $\mathrm{Ker}(f_7) = 0$. Pour l'image, on remarque que $G(x) = f_7(g(x))$ est $\mathcal{C}^1$ et vérifie $G(0) = 0$. On pose $\mathcal{X} = \{H \in \mathcal{C}^1([0,1]) \mid H(0) = 0\}$, et on a $\mathrm{Im}(f_7) \subset \mathcal{X}$. De plus, si la fonction H est dans $\mathcal{X}$, alors, $H(x) = \int_0^x H'(y)dy = f_7(H'(x))$. Donc, $\mathcal{X} \subset \mathrm{Im}(f_7)$. On a montré que $\mathrm{Im}(f_7) = \mathcal{X}$.*

8. *La fonction f_8 est linéaire. En fait, soient P_1, P_2 deux polynômes quelconques dans $\mathbb{R}_2[x]$. Alors, on a que*

$$f_8\Big((P_1+P_2)(x)\Big) = \Big((P_1+P_2)(0), (P_1+P_2)'(0)\Big) = \Big(P_1(0)+P_2(0), P_1'(0)+P_2'(0)\Big) =$$
$$\Big(P_1(0), P_1'(0)\Big) + \Big(P_2(0), P_2'(0)\Big) = f_8\big(P_1(x)\big) + f_8\big(P_2(x)\big).$$

De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre réel et $P \in \mathbb{R}_2[x]$ un polynôme quadratique quelconque, alors, $f_8(\lambda \cdot P) = \Big((\lambda \cdot P)(0), (\lambda \cdot P)'(0)\Big) = \Big(\lambda \cdot P(0), \lambda \cdot P'(0)\Big) = \lambda \cdot f_8\big(P(x)\big)$.

Soit $P = ax^2+bx+c \in \mathbb{R}_2[x]$ un polynôme quelconque. Le vecteur $f_8(P(x))$ est égal à (c, b). La fonction f_8 est surjective. En fait, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe un polynome $P(x)$, tel que $f_8(P(x)) = (\alpha, \beta)$. Par exemple, on peut prendre $P(x) = x^2+\beta x+\alpha \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors, $\mathrm{Im}(f_8) = \mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\big(\{(1,0),(0,1)\}\big)$. En même temps, f_8 n'est pas injective : $f_8(a \cdot x^2) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. De plus, $f_8(ax^2+bx+c) = 0 \Leftrightarrow b, c = 0$. Donc, $\mathrm{Ker}(f_8) = \mathrm{Vect}(\{x^2\}) \subset \mathbb{R}_2[x]$.

Continuously differentiable functions: class C^1
(first derivative exists and it is continuous).
"over a closed & bounded non-trivial interval of the real line
we have: $C^1([a,b]) \subset C^0([a,b])$