Algèbre I
Corrigé Série 8

9 novembre 2020

1. **Noyau et image d'une application linéaire** ($\star$)

(a) Soit $f\colon \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $p \mapsto \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x$.

i. Montrer que f est linéaire.

Sol.: *Soient $p, q \in \mathbb{R}_1[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que $f(\lambda p + q) = \lambda f(p) + f(q)$. On a*

$$\begin{aligned} f(\lambda p + q) &= \int_0^1 (\lambda p + q)(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lambda p(x) + q(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda \int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x = \lambda f(p) + f(q). \end{aligned}$$

ii. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$[a x^2/2 + bx + C]_0^1 = 0$

Sol.: *Soit $p(x) = ax + b \in \mathbb{R}_1[x]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Le noyau de f est $\mathrm{Ker}(f) = \{p \in \mathbb{R}_1[x] \mid f(p) = 0\}$, ce qui implique $\int_0^1 ax + b\,\mathrm{d}x = 0$, i.e., $b = -\frac{1}{2}a$. C.-à-d., le noyau de f est donné par les polynômes de la forme $p(x) = ax - \frac{1}{2}a$. Une base pour $\mathrm{Ker}(f)$ est donc $\left\{x - \frac{1}{2}\right\}$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.*

iii. Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Sol.: *L'image de f est $\mathrm{Im}(f) = \{\cancel{p \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})} \mid \frac{1}{2}a + b\}$, c.-à-d., l'image de f est tout $\mathbb{R}$: $Img(f) = \mathbb{R}$. Une base pour $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par $\{1\}$, et $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.*

correggere

iv. Vérifier le théorème du rang pour f.

Sol.: *On a bien $\dim(\mathbb{R}_1[x]) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$, i.e., $2 = 1 + 1$.*

(b) Soit $g\colon \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ l'application définie par $A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^\top)$, où $A^\top$ note la matrice transposée de A (cf. Série 4, exercice 1).

i. Montrer que g est linéaire.

Sol.: *Soient $M, N \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On vérifie que $g(\lambda M + N) = \lambda g(M) + g(N)$. On a*

$$\begin{aligned} g(\lambda M + N) &= \tfrac{1}{2}\left(\lambda M + N + (\lambda M + N)^\top\right) = \tfrac{1}{2}\left(\lambda M + N + \lambda M^\top + N^\top\right) \\ &= \lambda \tfrac{1}{2}\left(M + M^\top\right) + \tfrac{1}{2}\left(N + N^\top\right) = \lambda g(M) + g(N). \end{aligned}$$

ii. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

Sol.: *Le noyau de g est $\mathrm{Ker}(g) = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid g(A) = 0\}$, ce qui implique $\frac{1}{2}(A + A^\top) = 0$, i.e., $A = -A^\top$. C.-à-d., le noyau de g est formé par les matrices antisymétriques de taille 2. En utilisant la notation de l'exercice 1 de la Série 4, on peut écrire $\mathrm{Ker}(g) = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$. Une base pour $\mathrm{Ker}(g)$ est donnée par*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = 1$.

iii. Trouver une base de $\mathrm{Im}(g)$.

Sol.: *L'image de g est $\mathrm{Im}(g) = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid g(A)\}$, c.-à-d., l'image de g est formée par les matrices symétriques de taille 2. On peut écrire $\mathrm{Im}(g) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Une base pour $\mathrm{Im}(g)$ est donnée par*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

En fait, g est l'app. linéaire que étant donnée une matrice A, nous retourne la partie symétrique de A.

Donc $\dim(\mathrm{Im}(g)) = 3$.

iv. Vérifier le théorème du rang pour g.

Sol.: *On a bien $\dim(\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$, i.e., $4 = 1 + 3$.*

Difficulté : ($\star$) niveau basique ; ($\star\star$) niveau de l'examen ; ($\star\star\star$) niveau avancé.

2. **Applications linéaires en géométrie** ($\star\star$)

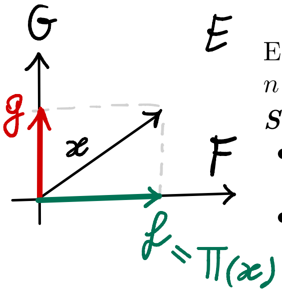
Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. On note $\mathcal{B}_F = \{b_1, \ldots, b_p\}$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p, b_{p+1}, \ldots, b_n\}$ de E. On note aussi $G = \mathrm{Vect}(b_{p+1}, \ldots, b_n)$, et on vérifie que $E = F \oplus G$. Rappel : somme directe

(a) Soit $t : x \mapsto a + x$ la translation de vecteur $a \neq 0$. Est-ce que t est linéaire ? Si oui, donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, puis son noyau et son image.

Sol.: *On remarque que $t(0) = a$, avec $a \neq 0$, donc t n'est pas linéaire.*

(b) Soit Π la projection sur F définie par

$$\Pi(b_i) = \begin{cases} b_i \text{ si } i \leq p, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$



En supposant que Π est linéaire, expliciter la valeur de $\Pi(x)$ pour $x \in E$. Faites un dessin pour $n = 2$ et $p = 1$. Quelle est la matrice de Π dans la base $\mathcal{B}$? Donner le noyau et le rang de Π.

Sol.:

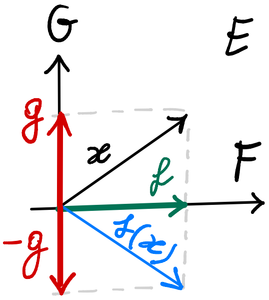
- *Soit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in E$, alors $\Pi(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i b_i$. Ainsi, si $x = f + g$, avec $f = \sum_{i=1}^p \lambda_i b_i \in F$ et $g = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i b_i \in G$, alors $\Pi(x) = f$.*
- *La matrice de Π dans la base $\mathcal{B}$ est*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & O_{p\times(n-p)} \\ \hline O_{(n-p)\times p} & O_{(n-p)} \end{array}\right).$$

- *Noyau : Si $x = f + g$, on a que $\Pi(x) = 0$ si et seulement si $f = 0$, donc $\mathrm{Ker}(\Pi) = G$.*
- *Rang : Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(\Pi) = \dim(\mathrm{Im}(\Pi)) = p$ (cf. avec la matrice ci-dessus). Donc $\mathrm{Im}(\Pi) = F$ (car $\dim(F) = p$).*

(c) Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G définie par

$$s(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in F, \\ -x \text{ si } x \in G. \end{cases}$$



Si s est linéaire, que vaut $s(x)$ pour $x \in E$? Faites un dessin pour $n = 2$ et $p = 1$. Quelle est la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$? Donner le noyau et le rang de s. Montrer que $s = 2\Pi - \mathrm{Id}$.

Sol.:

- *Si $x = f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$, alors $s(x) = f - g$.*
- *La matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & O_{p\times(n-p)} \\ \hline O_{(n-p)\times p} & -I_{(n-p)} \end{array}\right).$$

- *Noyau : Si $s(x) = f - g = 0$, alors, comme $F \cap G = \{0\}$ (car $E = F \oplus G$), on a $f = g = 0$, et donc $x = 0$. C'est à dire, $\mathrm{Ker}(s) = \{0\}$.*
- *Rang : Par le théorème du rang, $\mathrm{rg}(s) = \dim(\mathrm{Im}(s)) = n$ (cf. avec la matrice ci-dessus). Donc $\mathrm{Im}(s) = E$.*
- *Montrer que $s = 2\Pi - \mathrm{Id}$: Pour tout $x \in E$, si $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$, alors $2\Pi(x) - x = 2f - (f + g) = f - g = s(x)$. Donc $2\Pi - \mathrm{Id} = s$.*

(d) Si $n = 2$ et $p = 1$, on note r_θ la rotation d'angle θ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

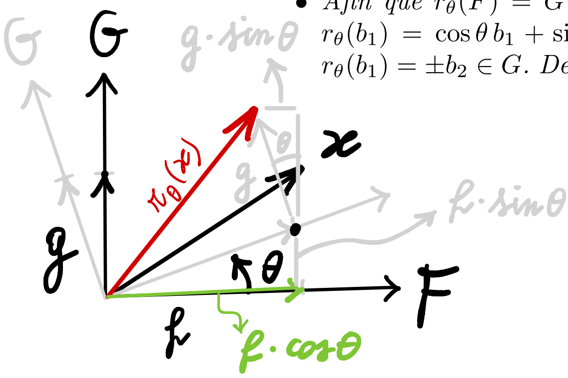
$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Faire un rotation d'angle θ du système de réf. aussi

Que vaut $r_\theta(x)$ pour $x \in E$? Quel θ faut-il choisir pour que r_θ envoie F sur G et G sur F ? Quelle est la matrice de $r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2}$ dans $\mathcal{B}$?

Sol.:

- *Si $x = f\, b_1 + g\, b_2$, alors $r_\theta(x) = (f \cos\theta - g \sin\theta)\, b_1 + (f \sin\theta + g \cos\theta)\, b_2$.*
- *Afin que $r_\theta(F) = G$ et $r_\theta(G) = F$, il suffit de montrer que $r_\theta(b_1) \in G$ et $r_\theta(b_2) \in F$. Or $r_\theta(b_1) = \cos\theta\, b_1 + \sin\theta\, b_2$, donc il faut $\cos\theta = 0$, c.-à-d., $\theta = \pi/2 + k\pi$. Alors on a bien $r_\theta(b_1) = \pm b_2 \in G$. De même, on trouve $r_\theta(b_2) = \pm b_1 \in F$. Alors la condition est $\theta = \pi/2 + k\pi$.*



Donc :

abscisse de $r_\theta(x)$: $f \cos\theta - g \sin\theta$

ordonnée de $r_\theta(x)$: $f \sin\theta + g \cos\theta$

- *Matrice de $r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2}$ dans $\mathcal{B}$: On calcule*

$$\begin{aligned} r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2}(b_1) &= r_{\theta_1}(\cos\theta_2\, b_1 + \sin\theta_2\, b_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\, b_1 + (\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\, b_2 \\ &= \cos(\theta_1+\theta_2)\, b_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)\, b_2. \end{aligned}$$

On trouve de même

$$r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2}(b_2) = -\sin(\theta_1+\theta_2)\, b_1 + \cos(\theta_1+\theta_2)\, b_2.$$

Donc la matrice de $r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2}$ dans $\mathcal{B}$ est $A_{\theta_1+\theta_2}$. En fait, $r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2} = r_{\theta_1+\theta_2}$.

(e) Soit $h : E \to E$ une application linéaire telle que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \lambda_x\, x$. Montrer que h est une homothétie, c.-à-d., h_x ne dépend pas de x. Quelle est la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$? Et dans une autre base ?

Sol.:

- *Montrer que h est une homothétie : Pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = \lambda_x\, x$. En particulier, $h(b_i) = \lambda_{b_i}\, b_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Mais*

$$\begin{aligned} h(b_1 + \ldots + b_n) &\overset{\text{déf.}}{=} \lambda_{b_1+\ldots+b_n}\,(b_1 + \ldots + b_n) \\ &= \lambda_{b_1}\, b_1 + \lambda_{b_2}\, b_2 + \ldots + \lambda_{b_n}\, b_n, \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a utilisé la linéarité de h et le fait que $h(b_i) = \lambda_{b_i}\, b_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Comme $\{b_1, \ldots, b_n\}$ est une base, le vecteur $h(b_1 + \ldots + b_n)$ se décompose de manière unique dans cette base, ce qui implique $\lambda_{b_1+\ldots+b_n} = \lambda_{b_1} = \lambda_{b_2} = \ldots = \lambda_{b_n}$. Donc si on note $\lambda = \lambda_{b_1} = \lambda_{b_2} = \ldots = \lambda_{b_n}$, on a $h(b_i) = \lambda\, b_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Donc pour tout $x \in E$, $h(x) = \lambda\, x$ (c.-à-d., λ ne dépend pas de la direction x).
- *La matrice de h est $\lambda\, I_n$ dans **toute** base.* pourquoi ? car une autre base peut tjrs s'obtenir comme comb. linéaire des $\{b_1, \ldots, b_n\}$

3. **Théorème du rang : exemples et contre-exemples** ($\star\star\star$)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est d'appliquer le théorème du rang et son corollaire pour montrer l'injectivité/la surjectivité des applications linéaires.

(a) Montrer que l'application $f \colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}^{n+1}$, définie par $p \mapsto (p(0), p(1), \ldots, p(n))$, est linéaire et bijective.

Astuce : voir l'exercice 4 de la Série 3 ("interpolation lagrangienne").

Sol.: vu en cours ?

espace d'arrivée

- *Linéarité : triviale.*
- *Si $p \in \mathbb{R}_n[x]$ est tel que $f(p) = 0$, alors $p(0) = p(1) = \ldots = p(n) = 0$, c.-à-d., p a $(n+1)$ racines. Comme un polynôme de degré $\leqslant n$ n'a que n racines au maximum, alors $p(x) = 0$ pour tout x. Donc, $\operatorname{Ker}(f) = \{0\}$, i.e., f est injective. Pour la surjectivité, on peut utiliser l'exercice 4 de la Série 3 : pour tout $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ il existe un unique polynôme $q \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $q(j) = b_j$ pour tout $0 \leqslant j \leqslant n$. Donc, f est bijective. (C'est un* isomorphisme *!)*

(b) Pour l'application $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, définie par $(x, y) \mapsto (y, 0)$, montrer que l'on n'a pas $\operatorname{Ker}(\varphi) \oplus \operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^2$, et vérifier que le théorème du rang s'applique.

Sol.: *On observe que les éléments du noyau $\operatorname{Ker}(\varphi)$ sont de la forme $(x, 0)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Donc on peut écrire le noyau de φ comme $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Vect}\{(1,0)\}$. Pour l'image, on a $\operatorname{Im}(\varphi) = \{(y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Donc on peut écrire l'image de φ comme $\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Vect}\{(1,0)\}$. Ainsi on a $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Im}(\varphi) \subsetneq \mathbb{R}^2$. Notamment, $\operatorname{Ker}(\varphi) \cap \operatorname{Im}(\varphi) \neq \{0\}$, donc $\operatorname{Ker}(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi)$ ne sont pas en somme directe. Mais on a bien que le théorème du rang s'applique, car $\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}^2)$.*

contenu en $\mathbb{R}^2$, mais pas égal à $\mathbb{R}^2$

(c) En utilisant le théorème du rang, trouver l'espace vectoriel F tel que l'application $D \colon \mathbb{R}_n[x] \to F$, définie par $p(x) \mapsto p'(x)$ soit surjective.

Sol.: *Dans la base $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ de $\mathbb{R}_n[x]$, l'espace $\operatorname{Ker}(D)$ s'écrit comme $\operatorname{Vect}(\{1\})$, car $p'(x)$ est la fonction nulle si et seulement si $p(x)$ est une constante. Par le théorème du rang, on a $\dim(\operatorname{Im}(D)) = n + 1 - \dim(\operatorname{Ker}(D)) = n$. En même temps, on a que $\operatorname{Im}(D) \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$. La dimension de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ est n, donc, $\operatorname{Im}(D) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$. Alors, pour $F = \operatorname{Im}(D) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$, la fonction D est surjective.*

car $Ker(D) \neq \{0\}$

(d) On suppose maintenant que $F = \mathbb{R}[x]$. L'application D est-elle injective ? surjective ? Que peut-on en déduire sur le théorème du rang en dimension infinie ? ? 3(c)

dans l'espace de départ

dans l'espace d'arrivée

Sol.: *L'application D n'est pas injective (voir 2(b)), mais elle est surjective. En fait, pour tout polynôme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, il existe un polynôme $q(x)$ tel que $q'(x) = f(x)$. Par exemple, on peut prendre $q(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + a_0 x$. Donc, on a une application $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ avec $\dim(\mathrm{Ker}(D)) > 0$, et $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{R}[x]$. On observe donc que le théorème du rang ne s'applique pas en dimension infinie.*

NB. : $\mathbb{R}[x]$: polynômes réels

(il n'y a pas de degré maximal)