UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Algèbre I
Corrigé Série 9

Exercices sur le calcul matriciel.

1. **Produit matriciel.** ($*$) Calculer les produits des matrices suivantes

   (a)

   Produit lignes x colonnes
   Sont-elles compatibles ?

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{4\times 2+1\times 3}{\overset{\shortparallel}{11}} & -2 \\ 13 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Les 2 matrices ne sont pas de type compatible.

   La première matrice est de taille 2×2 et la deuxième matrice est de taille 3×2, et comme $2 \neq 3$, le produit n'est pas défini.

   (c)

$$\begin{pmatrix} -i & 4 & -1 \\ i & 5 & -i \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{pmatrix}}^{\text{Ce produit d'abord}} = \begin{pmatrix} -i & 4 & -1 \\ i & 5 & -i \end{pmatrix},$$

   car on a l'égalité

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (d)

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}^{\text{Ce produit d'abord}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -23 & -5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 \\ -5 & -28 & -46 & 28 \\ 0 & 6 & 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. **Représentation matricielle des applications linéaires.** ($*$) Considérons les fonctions linéaires $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, définies par

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3, -x_2 + x_3), \\ g(x_1, x_2) &= 3x_1 + x_2, \\ h(x_1, x_2) &= (x_1 + 2x_2, -4x_1 + x_2, x_2). \end{aligned}$$

   $e_1 = (1,0,0)$
   $e_2 = (0,1,0)$
   $e_3 = (0,0,1)$

   (a) Donner, pour les bases canoniques de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, les matrices A, B et C représentant f, g et h.

   Sol.:

   Cela revient à mettre les coeff. de x_1 sur la 1e colonne, etc.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Calculer les matrices, si elles existent, qui représentent $f \circ h$, $g \circ f$ et $g \circ h$.

   Sol.:

   - *$f \circ h$: La matrice représentative est donnée par*

$$M(f\circ h) = M(f)\cdot M(h) = AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $g \circ f$: *La matrice représentative est donnée par*

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

- $g \circ h$: *N'existe pas car* $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *et* $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Ou, si vous préférez, les matrices* B *et* C *ne sont pas de type compatible, car* $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ *et* $C \in \mathbb{R}^{3\times 2}$.

(c) Calculer en utilisant le produit matrice-vecteur l'image de $x = (3, 2)$ par f, g, h, $f \circ h$ et $g \circ f$.
Sol.: *Les produits matrice-vecteur* Ax *et* $(BA)x$ *ne sont pas de type compatible, car* $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ *et* $BA \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, *mais* $x \in \mathbb{R}^2$. *Pour les autres produits on obtient :*

$$Bx = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 11, \qquad Cx = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$(AC)x = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

3. **L'image d'un vecteur.** $(**)$ Soient $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ et $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ deux bases de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$. Considérons l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) & \mapsto & q(x) = p(x+1) \end{array}.$$

(a) Pour le polynôme $g(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3$, calculer $[f(g)]_{\mathcal{B}}$.
Sol.: *Calculons le polynôme* $f(g) \in \mathbb{R}_3[x]$. *On a :*

développer tous les calculs et identifier les coeff. de $1, x, x^2, x^3$

$x^3 + 1 + 3x^2 + 3x$

$$(f(g))(x) = g(x+1) = 1 + 2(x+1) + 4(x+1)^2 + 8(x+1)^3 =$$
$$(1+2+4+8) + (2+4\cdot 2+8\cdot 3)x + (4+8\cdot 3)x^2 + 8x^3 = 15 + 34x + 28x^2 + 8x^3.$$

Donc, $[f(g)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 15 \\ 34 \\ 28 \\ 8 \end{pmatrix}$.

(b) Calculer $[f(g)]_{\mathcal{C}}$ directement, c-a-d, en calculant les coordonnées de $f(g)$ comme une combinaison linéaire des vecteurs dans $\mathcal{C}$.
Sol.: *Ici il faut trouver les nombres réels* a, b, c, d *tels que l'égalité suivante est vraie :*

$$f(g)(x) = 15 + 34x + 28x^2 + 8x^3 = a\cdot 1 + b(1+x) + c(1+x+x^2) + d(1+x+x^2+x^3).$$

Ainsi, on obtient le système suivant pour a, b, c, d :

$$\begin{cases} a+b+c+d = 15 \\ b+c+d = 34 \\ c+d = 28 \\ d = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -19 \\ b = 6 \\ c = 20 \\ d = 8, \end{cases}$$

alors,

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

$$[f(g)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -19 \\ 6 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculer la matrice $M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.
Sol.: *La matrice* $M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ *est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les images par* f *des vecteurs de la base* $\mathcal{B}$ *de départ, exprimées dans la base* $\mathcal{C}$ *d'arrivée. Calculons les images des*

$$M(f)_{B,C} = \left[[f(b_1)]_C \;\vdots\; [f(b_2)]_C \;\vdots\; [f(b_3)]_C \;\vdots\; [f(b_4)]_C \right]$$

vecteurs de la base $\mathcal{B}$. On a : ← déjà dans la base C

$$f(1) = 1,$$
$$f(x) = 1 \cdot (1+x),$$
il faut les exprimer dans la base C
$$f(x^2) = (x+1)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 \cdot (1 + x + x^2) + 1 \cdot (1+x) - 1 \cdot 1,$$
$$f(x^3) = (x+1)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1 \cdot (1 + x + x^2 + x^3) + 2 \cdot (1 + x + x^2) - 2 \cdot 1.$$

Donc, on obtient $M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(d) En utilisant la question précédente et Prop. 3.18 du cours, calculer $[f(g)]_{\mathcal{C}}$.

cela devra confirmer le resultat du point (b).

Sol.: *Par Prop. 3.18 du cours, on a l'égalité suivante :*

$$[f(g)]_{\mathcal{C}} = M(f)_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot \boxed{[g]_{\mathcal{B}}}.$$

Alors, on obtient :

$$[f(g)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -19 \\ 6 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

4. **Matrices inversibles.** (∗∗)

(a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $y = (2, 1)$. Calculer $(I_2 - A)^{-1}$ et en utilisant la matrice $(I_2 - A)^{-1}$ résoudre l'équation $x - Ax - y = 0$. Ici, $I_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est la matrice identité.

Sol.: *D'abord on calcule l'inverse de* $(I_2 - A)$:

$\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

On cherche à obtenir une matrice identité à gauche

$$I_2 - A \to \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

donc

$$(I_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Or $x - Ax - y = 0 \Leftrightarrow (I_2 - A)\, x = y \Leftrightarrow$

$$x = (I_2 - A)^{-1} y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$. ex. avec un paramètre … très important!

i. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la matrice B est-elle inversible ? Dans ce cas, calculer B^{-1}.

Sol.: On répond ensemble à ces deux questions.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \mapsto L_3 - 2L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

On cherche à obtenir une matrice identité à gauche

pour $a \neq 2$

$$\xrightarrow{L_3 \mapsto L_3/(a-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - 4L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{a-2} & \frac{a-6}{a-2} & -\frac{4}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \mapsto L_1 - 2L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a-12}{a-2} & \frac{9-2a}{a-2} & \frac{5}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{a-2} & \frac{a-6}{a-2} & -\frac{4}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{a-2} & \frac{1}{a-2} & \frac{1}{a-2} \end{array}\right).$$

Donc la matrice inverse

$$B^{-1} = \frac{1}{a-2}\begin{pmatrix} a-12 & 9-2a & 5 \\ 8 & a-6 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

existe si $a \neq 2$.

ii. Dans le cas $a = 3$, résoudre le système $Bx = (5, 6, 5)$.
Sol.:

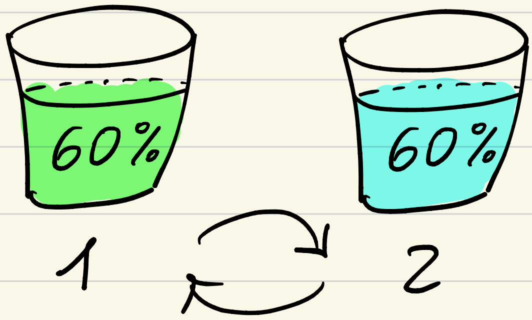
$$Bx = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = B^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \overset{(a=3)}{\Longleftrightarrow} x = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 5 \\ 8 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. **Les sept couleurs de l'arc-en-ciel** ($\star\star\star$) Il y a sept seaux avec de la peinture, remplis à 90% de leur capacité. Chacun des seaux contient une peinture avec une couleur différente. Il est possible de transférer de la peinture d'un seau à l'autre (s'il y a assez de place), et donc de mélanger les couleurs. On ne veut pas jeter de la peinture. La question est : peut-on obtenir une couleur homogène dans au moins un seau ?
Astuces :

Les couleurs $\Longleftrightarrow$ *un système de coordonnées dans* $\mathbb{R}^7$;
Un seau $\Longleftrightarrow$ *un vecteur dans* $\mathbb{R}^7$;
Un mélange $\Longleftrightarrow$ *une transformation élémentaire d'une matrice ;*
Le rang $\Longleftrightarrow$ *la clé du succès !*

Commencer en abordant la même question pour deux seaux, chacun rempli à 60%.
Sol.: 2 seaux à 2 couleurs : *On peut représenter les seaux par des vecteurs dans* $\mathbb{R}^2$. *Par exemple, un seau rempli à 100% avec de la peinture blanche peut s'écrire comme* $(1,0) \in \mathbb{R}^2$, *et un seau rempli à 100% avec de la peinture noire peut s'écrire comme* $(0,1) \in \mathbb{R}^2$. *Donc, en suivant l'astuce, on commence avec deux vecteurs* $v_1 = (0.6, 0)$ *et* $v_2 = (0, 0.6)$. *Si on les écrit dans une matrice, on a* $A = A_0 = 0.6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Cette matrice est de rang* 2.
Le mélange numéro n *peut s'écrire comme une transformation élémentaire de la matrice* A_{n-1}, *et cela nous donne la matrice* A_n *ayant la forme suivante. Supposons que l'on veut transférer* α% *de toute la peinture contenue dans le seau numéro* 1 *au seau numéro* 2. *Donc, la première ligne de la matrice* A_n *est égale à la première ligne de la matrice* A_{n-1} *multipliée par* $(1 - \frac{\alpha}{100})$. *Alors la seconde ligne de* A_n *est égale à la somme de la seconde ligne de* A_{n-1} *et la première ligne de* A_{n-1} *multipliée par* $\frac{\alpha}{100}$. *On remarque que* $\alpha \neq 100$, *parce que* $\frac{3}{5} + \frac{3}{5} > 1$, *donc on ne peut pas vider un des seaux sans jeter de la peinture. Donc,* $(1 - \frac{\alpha}{100}) \neq 0$. *D'une manière similaire, on peut écrire l'autre mélange comme une transformation élémentaire de la matrice* A_{n-1}. *En tout cas, chaque mélange doit préserver le rang, donc, pour tout* n, *on a* $\mathrm{rg}(A_n) = 2$.
On observe aussi que, pour tout n, *la somme des éléments dans chaque colonne de la matrice* A_n *est égale à* 0.6. *Donc, la somme des vecteurs qui représentent les seaux est toujours égale à* $0.6 \cdot (1,1)$. *Enfin, si après* k *mélanges on obtient une couleur homogène dans un seau, donc la matrice* A_n *contient une ligne de la forme* $\kappa \cdot (1,1)$. *Mais le vecteur* $\kappa \cdot (1,1)$ *est colinéaire à* $0.6 \cdot (1,1)$. *Donc, les lignes de la matrice* A_k *sont liées et le rang de* A_k *n'est pas égal à* 2. *Contradiction. On ne peut pas obtenir une couleur homogène dans un des seaux.*
7 seaux à 7 couleurs : *Il s'agit d'une généralisation immédiate du cas avec deux seaux.*

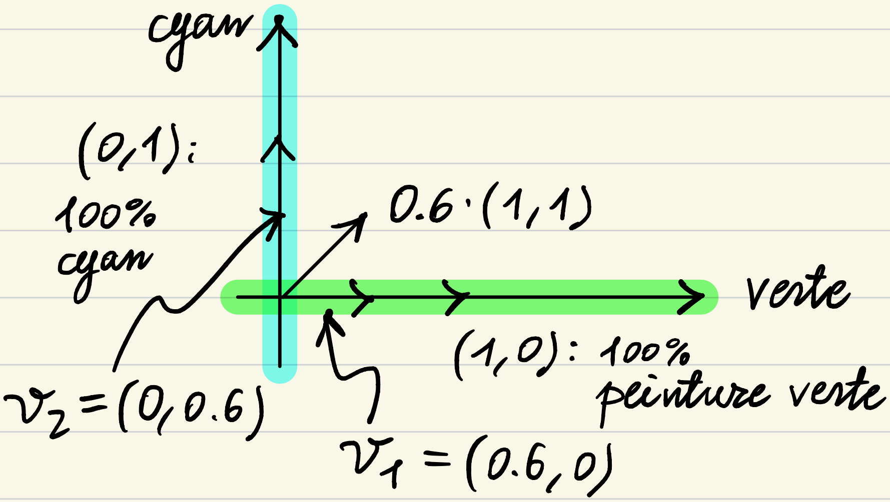
2 seaux à 2 couleurs :



il est possible de transférer de la peinture d'un seau à l'autre, et donc mélanger les couleurs

<u>Q</u> : Est-ce qu'on peut obtenir une couleur homogène dans au moins un seau ?

Astuce $\begin{cases} \text{couleurs : syst. coordonnées dans } \mathbb{R}^2 \\ \text{seau : vecteur dans } \mathbb{R}^2 \\ \text{mélange : transf. élémentaire d'une matrice} \end{cases}$



On écrit les 2 vecteurs dans une matrice

$$A_0 = \left(v_1 \,\middle|\, v_2 \right) = 0.6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rang de cette matrice ?

$rg(A) = 2$

Mélange numéro n :

A_n = transf. élém. de A_{n-1}

Transférer $\overset{= \alpha/100}{\alpha\%}$ de la peinture du seau 1 au seau 2

Donc : 1e ligne de A_n = 1e ligne de $A_{n-1} \times (1-\alpha/100)$

2e ligne de A_n = 2e ligne de A_{n-1} + 1e ligne de $A_{n-1} \times \alpha/100$

<u>Remarque</u> : $\alpha \neq 100$, car $0.6+0.6 > 1$ donc on ne peut vider un des seaux sans jeter de la peinture.
Donc $(1-\alpha/100) \neq 0$.

Chaque mélange doit préserver le rang, donc $\forall n$, $rg(A_n) = 2$

<u>Obs.</u> : $\forall n$, somme élém. pour chaque colonne de A_n est égale à 0.6

$\rightsquigarrow$ somme des vecteurs qui représentent les seaux est tjrs égale à $0.6 \cdot (1,1)$

$\rightsquigarrow$ Si après k mélanges on obtient une couleur homogène dans un seau, alors A_n possède une ligne de la forme $\pi \cdot (1,1)$

Mais $\pi \cdot (1,1)$ est colinéaire à $0.6 \cdot (1,1)$

Donc, les lignes de A_k sont liées et $rg(A_k) \neq 2$

contradiction $\lightning$

On ne peut pas obtenir une couleur homogène dans un des seaux.